HENNING ANDERSEN

¡Aritmética Activa!



El movimiento y la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de una escuela Waldorf

HENNING ANDERSEN

¡Aritmética Activa!

El movimiento y la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de una escuela Waldorf

Waldorf PUBLICATIONS

Publicado por:

Publicaciones Waldorf
Instituto de Investigación de la Educación Waldorf
38 Main Street, Chatham, NY 12037

¡Aritmética Activa! (Regn og Hop!)
publicado por Brage Forlagstrykkeri, Dinamarca
Segunda edición © 2014
ISBN 978-1-936367-50-4
Primera Edición 1984, 1995, 2001, 2013
ISBN 978-87-88258-74-5

Autor e ilustrador: Henning Andersen
Traducción al Español: Siobhan Bowers
Editor y diseñador, primera edición: David Mitchell
Diagramación: Ann Erwin
Ilustraciones: páginas 43–44: Albrecht Dürer; página 38: "El León", de *Hojas Extraviadas de la Literatura Extraña*, un libro de cuentos reconstruido por Lafcadio Hearn

Derechos reservados. Ninguna sección de esta publicación se puede reproducir o traducir de modo o formato alguno sin el permiso de la editorial, a excepción de citas breves para fines de reseña.

Serie Curricular

El Comité de Publicaciones de AWSNA tiene el gusto de presentar esta publicación como parte de nuestra *Serie Curricular*. Las ideas y pensamientos aquí expresados pertenecen únicamente al autor y no representan criterios implícitos establecidos por AWSNA. Nuestra intención es estimular lo más posible reflexiones variadas sobre nuestra currícula. Envíe su retroalimentación a patrice@waldorf-research.org así como solicitudes de futuras publicaciones.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Prólogo del Traductor 4

Prólogo 5

1 Introducción: La Enseñanza de la Aritmética a Niños 7

2 La Naturaleza Tripartita del Hombre 13

3 Las Cualidades de los Números y los Secretos Ocultos 19

4 Ritmo y Números 44

5 Las Tablas de Multiplicar 61

6 Más Tablas: Las Relaciones entre los Números 72

7 El Dibujo y la Aritmética 90

8 Números como Cantidades 109

9 Comentarios Finales sobre las Matemáticas, la Memoria y los Juegos 157

PRÓLOGO DEL TRADUCTOR
(a la edición en Inglés)

Este libro comienza con una descripción del sistema educativo danés. Se podría argumentar que parte de dicha descripción se podría omitir en la edición en Inglés. Sin embargo, la situación en Dinamarca es quizá un reflejo de lo que está pasando en el resto del mundo, por lo que hemos decidido incluirla.

Tuvimos la suerte de ser colegas del autor durante varios años. Al traducir su libro, recordamos muchas de las conversaciones que sostuvimos con él en el pasado. Henning se expresaba siempre con entusiasmo, y nos permitía comprender tanto los ejercicios prácticos como su trasfondo filosófico.

Tras estas conversaciones, las clases de aritmética se convirtieron en jubilosas experiencias tanto para el maestro como para los niños, no nos cabe la menor duda que cualquier maestro que estudie este texto vivirá la misma experiencia.

Verner Pedersen
Archie Duncanson

PRÓLOGO

El objetivo de este libro no es reproducir un recuento completo del método Steiner/Waldorf para la enseñanza de la aritmética en los grados inferiores. Esto se hace evidente al notar que se mencionan las áreas importantes de las cuatro operaciones aritméticas, pero no se profundiza en ellas; no se menciona cómo introducimos los números, y se habla apenas superficialmente acerca de la aritmética escrita. Además, se han omitido otros temas centrales.

El objetivo único es explorar las partes de la enseñanza de la aritmética que pueden desarrollarse a través del movimiento, y que pueden satisfacer la necesidad que tiene el niño de vivir experiencias anímicas en todo momento. Para muchos, esto último puede sonar ambicioso por demás, especialmente al relacionarlo a una materia tan 'seca' como la aritmética.

La materia, ciertamente, posee aspectos 'secos' que debemos considerar, pero sólamente cuando el niño alcance el desarrollo suficiente. No se trata simplemente de habilidades y de conocimientos, se trata de poder valorar las necesidades de cada edad.

Los puntos de vista expresados en este libro son: (1) durante los primeros años de escolaridad la voluntad y vida emotiva del niño juegan papeles más protagónicos que el intelecto, (2) que esta relación no quita

que el niño aprecie una materia como la aritmética. Al contrario, estos aspectos de la vida anímica humana pueden encontrar su mejor aliado en la aritmética.

Este libro está dirigido a maestros de grados inferiores, pero también a padres y adultos que trabajan con niños todos los días. Quizá intenten satisfacer la necesidad del niño de moverse con un juego o una actividad rítmica en grupos grandes o pequeños, o quizá quieran ofrecer una actividad más calmada para la hora de cenar juntos. En cualquiera de estas situaciones, las necesidades del niño se pueden satisfacer con los ejercicios que propongo a continuación. Además proveen una buena preparación para la actividad intelectual más adelante.

El autor ha sido maestro en una escuela Rudolf Steiner durante muchos años, al escribir el texto ciertamente ha pensado en niños y clases en particular. Ahora invita al lector a hacer lo mismo. Es decir, nunca hay que aplicar las recetas directamente – ni a la hora de cocinar, ni el el arte de la enseñanza – es importante transformarlas para que resuenen verdaderamente con los individuos que queremos nutrir. Sólo entonces serán valiosas para el cuerpo y el alma.

Henning Andersen

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN: LA ENSEÑANZA DE LA ARITMÉTICA A NIÑOS

Aquellos lectores más mayores recordarán por lo menos un libro de texto terriblemente aburrido de su niñez, que tenían que sacar de sus mochilas todos los días para estudiar árduamente. De la primera a la última página. De la primera hasta la última página, estaba lleno de números, dividido en lecciones para todo el año: Lección 1, lección 2, Lección 3, etc. Sin excepción cada lección tenía ejercicios de números y problemas redactados. Cada lección tenía una tabla de multiplicar, ejercicios de sumas, quizá una sección larga de restas y ejercicios de multiplicación y división.

También estaba el maestro. Él o ella estaba encargado de llegar hasta la última página del libro de texto antes de finalizar el año escolar, esto no le ofrecía muchas oportunidades para tomar la iniciativa y enseñar de otras maneras.

El autor recuerda a su propio maestro: Entraba con el libro en la mano, iba directamente al pizarrón, escogía un gis adecuado y escribía 7 en el pizarrón. Miraba a sus 30 alumnos por sobre sus anteojos para asegurarse que entendieran que la lección del día era la tabla del siete, y

escribía antes del 7 el signo de multiplicación, después del 7 un paréntesis y dentro números aleatorios. Todo esto lo lograba hacer con su mano derecha, mirando al grupo y de perfil al pizarrón.

Su cabeza estaba girada de modo que parecía una estatua egipcia, si olvidamos los anteojos y la ropa moderna. Un tercio del grupo respondía a las preguntas: 4 x 7 = 28, 9 x 7 = 63, 1 x 7 = 7, etc. Los resultados eran buenos. A cada alumno le tocaba responder varias veces a la semana.

Nos gustaba nuestro maestro, también nos asustaba un poco y queríamos complacerle. Sus métodos de enseñanza no eran emocionantes (ni siquiera se le ocurría esa posibilidad), pero al conocerlo llegamos a apreciarlo. Sin duda de vez en cuando él también soñaba de un libro de texto diferente, pero cada día enfrentaba la realidad que la escuela le ofrecía.

Al terminar la clase estábamos cansados y entumecidos, y nos estirábamos al salir. El único ejercicio físico que habíamos realizado durante la lección había sido ponernos de pie para recitar la tabla. El libro de aritmética sólo requería logros mentales, no alentaba ninguna actividad física, no tenía fotos que quizá nos hubiesen despertado el interés – era un libro muerto, como una guía de teléfonos.

Todo esto ha cambiado desde entonces. El carácter de la enseñanza de la aritmética se ha transformado gracias a la introducción de las matemáticas modernas y el interés en materias creativas. Esta nueva actitud se ve reflejada si comparamos mi antiguo libro de texto con uno de los años 60. Este último tiene dibujos y colores. Los problemas redactados hablan de camiones que deben transferir su carga a contenedores circulares y cuadrados, todo es más intenso, incluyendo las actividades.

En los 1960 los protagonistas eran la experimentación y la actividad. “Debemos asegurarnos en cada etapa que vemos la currícula

pensando que el niño necesita actividad y experimentación. Debe ser la tarea de la escuela – además de impartir ciertos conocimientos básicos – desarrollar las habilidades y talentos humanos, despertarlos para que desarrollen un entendimiento real de los problemas de la vida diaria".

"La meta de la escuela es preparar a los niños para que se encuentren con la comunidad, con el empleo, bien preparados para cumplir las expectativas que se espera de ellos. Sin embargo, la tarea primordial y principal de la escuela es promover múltiples oportunidades para que los niños crezcan y se conviertan en buenos seres humanos, felices y en armonía".

Estas citas provienen de *Pautas Educativas para la Escuela Danesa*, de Dinamarca, también conocido como 'el documento azul' de 1960. En la segunda cita "primordial y principal" es de gran interés histórico al compararlo con las leyes educativas danesas anteriores y lo que expresaban acerca de las metas de la educación. Anteriormente, la meta "primordial y principal" de la educación era impartir conocimientos básicos, ahora la meta "primordial y principal" se refiere a aspectos de la existencia humana muy distintos.

¡Qué emocionante e interesante!

Asimismo, es interesante ver que en el mismo documento azul, bajo el encabezado aritmética y matemáticas aparecen los objetivos de enseñar dicha materia: "impartir conocimientos y habilidades a los alumnos, entrenar y ejercitar las habilidades aritméticas que ellos necesitarán, más allá de la escuela, para sus vidas en familia, en comunidad y en la industria, y dar a los alumnos la confianza para conocer y usar las reglas y métodos básicos de la geometría y la aritmética".

Sería demasiado asegurar que los altos ideales encapsulados en las palabras "primordial y principal" han desaparecido por completo al llegar

a la sección de aritmética. Sin embargo sí podemos decir que los ideales se han mermado, influenciados por el modo de pensar tradicional.

Lo que aquí pasa, es lo que siempre ocurre cuando se nos impone algo nuevo. Nos percatamos de lo que debemos hacer con el intelecto. Es evidente al observar a nuestro grupo en nuestro propio salón de clases – y nos convencemos a nosotros mismos – que el cambio es necesario, pero no desarrollamos las habilidades prácticas necesarias para acompañar nuestra convicción emocional y conceptual.

Esta situación aparece en *Per Gynt* de Henrik Ibsen, donde el personaje principal observa, alejado, como un joven leñador intenta mutilarse la mano para escapar al servicio militar:

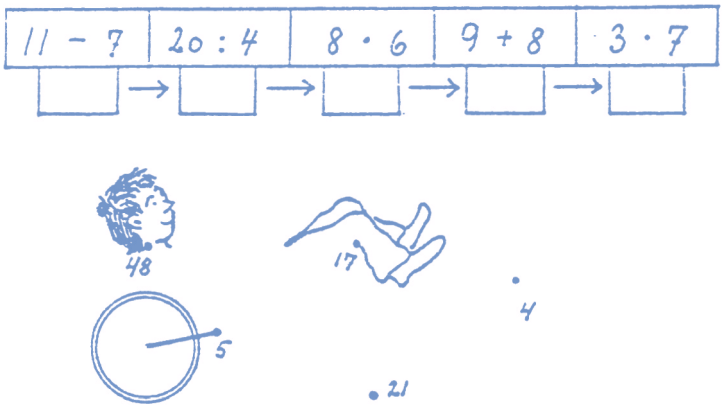
"Sí, pensarlo, desearlo y tener la voluntad también.
¡Pero hacerlo! No, eso no lo entiendo".

Ejecutar el hecho es lo difícil. Somos muy buenos para desarrollar ideales, predicar principios éticos. Sin embargo a menudo fallamos a la hora de ejercitar esos principios. Lo mismo ocurre a la hora de poner en práctica y ejecutar la enseñanza de la aritmética en los grados inferiores.

¿Qué podemos hacer para crear actividad y experimentación en nuestras lecciones de aritmética?

La solución, claro está, no yace en simplemente tomar elementos y diseños estimulantes de áreas que no están conectadas con la materia, aunque a menudo hagamos exactamente esto. Es natural que un niño juzgue entretenido resolver un problema como el que aparece en la siguiente página.

Sin embargo, aquí se trata de ver si se ha considerado correctamente el caso. Se le ha dado a los niños una ilustración que pertenece a otro



Completa la operación y conecta los puntos.

ámbito – a menudo zoológico – y su presencia únicamente señala, gracias a cómo hemos organizado las cosas, que la aritmética en sí no tiene ningún interés. Usamos caballos y elefantes para asistirnos por que aún no hemos encontrado el acercamiento que viva en completa armonía con la naturaleza del niño y a la vez contenga el elemento de motivación dentro de sí mismo.

Simultáneamente, en otra área, ocurre algo igual de desafortunado. Las criaturas de cuatro patas que aparecen en nuestros libros de aritmética tienden a pertenecer a especies peculiares, y las mariposas multicolor que creamos para lograr este propósito son poco estéticas. No podrían ser otra cosa, y gracias a que nuestros niños tienen una percepción artística que a menudo se nos olvida a los adultos, este método 'recompensa' sólo tiene efectos destructivos. Si estudiamos cuidadosamente estos libros de aritmética veremos que distorsionan la imagen del ser humano que queremos enseñarle a nuestros niños. Como cuando les pedimos que emparejen sombreros con diferentes formas (cónica, piramidal, esférica, cilíndrica, etc.) con cabezas de formas correspondientes a la

hora de enseñar la diferencia entre números pares e impares. Puede que los adultos consideren que estas caricaturas son graciosas, pero los niños inconscientemente se preguntarán por qué los adultos desperdician papel y tinta. Además, el instrumento humano no se creó de acuerdo a las formas geométricas, así que se ha abusado también de la geometría.

En la enseñanza de la aritmética, como en las demás materias, la pregunta fundamental que hay que formular es: ¿Cómo se relaciona la aritmética con la naturaleza del niño y con sus necesidades en esta etapa de su desarrollo? Si recordamos el 'documento azul' podemos ver que no se ha ignorado del todo esta pregunta, pero que la postura en relación a la aritmética sigue siendo la misma. El aspecto práctico ha predominado notoriamente. Este aspecto es el relacionado con la comunidad adulta, con sus oficios y habilidades necesarias. No es del todo extraño, ya que la aritmética y las matemáticas son las dos materias que más nos cuesta relacionar al mundo infantil, las dos materias que equivocadamente impartimos a los niños como si fuesen pequeños adultos.

Si miramos otros aspectos de la naturaleza humana diferentes a los que utilizamos para las matemáticas como adultos, veremos que también viven dentro de la aritmética y las matemáticas.

Capítulo 2

LA NATURALEZA TRIPARTITA DEL HOMBRE

En el mundo de la educación, se habló en su momento de la necesidad de tener materias diseñadas para la recreación. Esto ya no existe. El término 'materia recreativa' implica que los niños necesitan tener clases que los refresquen de las otras materias – que necesitan descansar después del esfuerzo de trabajar en serio.

Sin embargo, ya no pensamos así, más bien se están considerando materias que apelen a nuestras habilidades creativas natas. Se pensaba que las materias artísticas eran tanto recreativas y disciplinarias. Estas actividades recreativas llevaban implícitas un descanso tras completar el trabajo académico; más adelante se convirtieron en parte esencial del trabajo en sí, ya que el enfoque cambió. Se percibía más y más que lo artístico es parte integral del mundo del niño.

Hay dos corrientes de pensamiento que tratan del desarrollo esencial en la interpretación de qué necesitan los niños y cuál es la labor de la escuela. Afortunadamente en condiciones normales, los niños no necesitan que les ayuden a recrearse. Todo padre y madre de un hijo sano aprende esto, a menudo por medio de experiencias dolorosas.

Los niños necesitan ser creativos en todo lo que hacen en la escuela. Sin embargo hay algo que puede llegar a necesitar clases creativas

especiales: un horario carente de creatividad. Esto llevará a la fatiga.

La cita del 'documento azul' que habla de los aspectos interiores en términos de "buenos seres humanos, felices y en armonía" muestra cierta percepción de esto. Vale la pena evaluar los adjetivos de la cita. Podemos acercarnos a la esencia de la educación si los evitamos, y combinamos las dos citas para decir: "Es la labor de la escuela, primordial y principalmente, alentar cada oportunidad de crecer a través de la actividad y la experiencia".

Al formular pautas educativas de esta manera, tocamos el problema principal que aqueja la enseñanza en todas las escuelas de educación básica.

La enseñanza en la Primaria debe basarse principalmente en la actividad y la experiencia, cuanto más joven la clase, más aplica lo anterior. En la edad adulta la secuencia de la expresión anímica es frecuentemente la que Ibsen nos comparte en *Per Gynt*: "Pensarlo, desearlo, tener la voluntad, sí. Pero hacerlo…" Como adultos vivimos en nuestros pensamientos, los cuales impulsan nuestra vida de emociones que a su vez activa la voluntad.

Para los niños es todo lo contrario; viven sus vidas en actividad lúdica incansable. Durante el Preescolar y la Primaria, la vida emocional del niño se vuelve más rica y compleja. De ese cimiento surge la vida de pensamiento despierta y nítida del adulto. N.F.S. Grundtvig (1783–1872), gran autor danés y escritor de salmos, lo expresó de esta manera: "¿Qué son los pensamientos sino sentimientos conscientes de sí mismos?"

O de forma poética:

> … ¿Nunca ha vivido
> quién sabio se ha tornado
> gracias a lo que antes no amaba?

La actividad y la experiencia implican sentimiento y voluntad, cuando consideramos que la vida de pensamientos se esconde tras la frase "impartir ciertos conocimientos básicos", vemos que el 'documento azul' de las escuelas danesas ha incorporado a Grundtvig al evidenciar los tres elementos del alma, que finalmente, es de lo que se trata la educación del niño.

Vamos de la actividad de la voluntad por medio de la vida de sentimientos a la vida de pensamientos, esto debería ser un proceso largo. La enseñanza del niño es un proceso tripartita, y el desarrollo del concepto llega hasta el final.

Se han hecho muchos experimentos con el proceso de aprendizaje. Se han probado varios enfoques para el entrenamiento directo de las habilidades intelectuales del niño – por ejemplo, a través de las máquinas didácticas. Sin embargo queda claro que la actividad física es necesaria para que el niño vislumbre el mundo del pensamiento.

También se han probado muchos atajos, y existen varias biografías que así lo atestiguan. La vida del filósofo inglés John Stuart Mill (1806–1873), es un ejemplo. Desde muy pequeño estuvo bajo la influencia del pensar. Se desarrollo significativamente en esta área en los primeros años de su vida, y se le consideraba un niño prodigio. Sin embargo, cabe mencionar que su filosofía muestra una falta de confianza extraordinaria en los resultados del pensar, y consideraba que la ausencia de su niñez estaba directamente ligada a la difícil crisis que tuvo que vivir.

Un niño no puede crecer únicamente con conocimiento puro que reside en la vida de pensamientos – no sólo porque es demasiado difícil, sino porque su desarrollo depende de la actividad y la experiencia. Si intentamos imponer lo anterior, veremos que ciertos niños, no todos, se están educando. Esto es porque al pararnos frente un grupo de niños

como maestros, siempre sembramos una semillita de actividad, de una u otra forma, y este germen se transforma en pensamiento. Este es el curso inevitable de eventos que viven los niños.

Por lo tanto, es vitalmente importante que como maestros no sólo echemos a andar el proceso, también debemos estar conscientes de él en todo momento. Sólo así podremos evitar perder tiempo de enseñanza y ser verdaderamente 'efectivos' – quizá esta palabra no sea la mejor, pero se usa frecuentemente al atacar los métodos artísticos y creativos de enseñanza.

Al conocer íntimamente el proceso del alma, tal como ya se mencionó, podremos ser realmente efectivos. Recordemos además, que el desarrollo humano no se trata de algo pequeño que crece y se convierte en algo grande, conservando la misma estructura. Más bien las habilidades humanas se transforman por completo al crecer de un nivel al siguiente. El niño es este tipo de ser, se transforma por completo desde la infancia hasta la edad adulta.

Es por esto que el maestro debe ser muy paciente, no sólo en el día a día y al repasar la lección del día anterior, también de una fase de vida a otra. Quizá uno de los obstáculos más grandes que el maestro debe vencer es querer cosechar lo que apenas se sembró ayer. El educador y humanista Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827), dijo:

> *Es ist eine große menschliche kraft, ohne ungeduld zu harren, zu warten, bis alles reifet.*
>
> Es una gran virtud humana el esperar sin impaciencia, hasta que todo madure.

La fortaleza necesaria para esperar, y en la espera descubrir el ritmo exacto que guía el crecimiento del niño, es la misma fortaleza que crea el 'calor incubador' propicio que permea todo proceso educativo.

Jean Paul también habla de la función de 'siembra' que tiene el proceso educativo, pero va más allá y dice que la labor educativa es más de calor que de siembra. Se ha pues, conectado al pensamiento socrático que dice que sólo podemos hacer nacer aquellas habilidades que están latentes dentro del niño, esperando a que el maestro cree las condiciones de crecimiento necesarias. Esa, y sólo esa, es nuestra aportación como maestros. Esto no nos hace menos responsables – al contrario, nos hace más responsables.

En la aritmética y en las matemáticas surge la misma pregunta ¿Qué traen los niños consigo? y no ¿Qué exige la sociedad que les inculquemos? Hay que pensar cuáles leyes de desarrollo debemos cumplir para que estas cualidades latentes se desarrollen. Dicho de otra manera, no se trata de crear algo, sino de facilitar su crecimiento.

En nuestro caso particular debemos preguntarnos ¿Qué matemáticas yacen latentes dentro del niño, y cuales reglas nutren su desarrollo?

Rara vez tomamos en consideración lo que ya existe en el niño, prefiriendo enfocarnos en lo que opinamos que se convertirá el niño.

El niño es el punto de partida, y requiere de nosotros un estudio pedagógico, a diferencia del estudiante adulto que requiere un estudio vocacional y enfocado a cierta materia. Tendemos a pensar que el niño necesita lo mismo que el adulto.

Las leyes de desarrollo y cambio que gobiernan el intervalo entre el comienzo y el final, entre el niño y el joven adulto, son las que verdaderamente nos conciernen. Tendemos a evitar pensar acerca de la

metamorfosis, es una idea compleja y todo nuestro entorno profesional nos aleja de ella. Por lo tanto tenemos que hacer una gran esfuerzo de voluntad para organizar la enseñanza de las matemáticas para que realmente 'surja del niño'.

A groso modo 'evitemos evitar' la idea de la metamorfosis. Curiosamente esta expresión contiene algo de valor, ya que en el mundo de las matemáticas 'menos un menos es más', y nos abre la posibilidad de alcanzar un alto nivel de positividad para el niño si hacemos este esfuerzo de voluntad.

Capítulo 3

LAS CUALIDADES DE LOS NÚMEROS Y LOS SECRETOS OCULTOS

En el capítulo anterior se habló de los periodos sensibles de los niños y cómo relacionar nuestra enseñanza a las etapas específicas de desarrollo. El desarrollo del niño se basa en el desarrollo de los sentidos, pero el centro de gravedad migra rápidamente de un sentido a otro. Si utilizamos materiales didácticos que corresponden al ritmo de este desarrollo, estaremos verdaderamente ayudando al ser humano completo.

Usualmente no hablamos del 'sentido del pensamiento' que percibe pensamientos como percibimos sonidos, por ejemplo. Si llegaramos a hacerlo, esperemos a que el niño manifieste la necesidad de usarlo, y no pensemos que cuanto antes, mejor.

Tampoco hablamos del sentido matemático o del sentido geométrico, y aunque lo hiciéramos, no es claro que están conectados al sentido del pensamiento, esta parece ser la impresión que nos dan muchos libros de matemáticas.

En la vida del niño hay muchos indicadores del sentido matemático, y de que funciona desde temprana edad. Sin embargo, no parece estar íntimamente ligado al sentido de pensamiento (si es que existe), ya que el sentido matemático tiende a percibir lo cualitativo y no lo cuantitativo, que es lo que nos rodea en el día a día. Al estudiar la expresión física

de un joven niño y al estudiar la antigua historia de las matemáticas lo comprenderemos mejor.

Hay muchas pruebas de que los pueblos antiguos consideraban a las matemáticas como una ciencia cualitativa. Los restos de esta creencia viven hoy en día en nuestros 'números de suerte'. Esta superstición existe.

Así demostramos que una serie numérica no es una fila de pequeños soldados, cada uno un poquito mayor que el anterior, sino una fila de cifras individuales unidas; esta última idea está más vinculada al sentimiento.

Para los antiguos griegos los números tenían facciones individuales. El número 6 era particularmente perfecto, se podía dividir entre 1, 2 y 3, y al sumarlos resultaban en 6. También se puede dividir entre 6, aunque eso no se hacía, ya que se consideraba que algo dentro de sí no puede dividirse entre sí mismo. Así pues el número 6 contenía:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

ay por lo tanto su valor interno era igual al valor externo o el que mostraba. Por lo tanto era perfecto y armónico entre su interior y su exterior. El siguiente número perfecto es el 28, ya que contiene:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Si buscamos el siguiente y llegamos a 500 tendremos que retroceder para encontrarlo, y al hacerlo vivimos un poco lo que los grandes matemáticos de antaño tenían que hacer. Qué esfuerzo para encontrar el quinto número perfecto, de hecho es ¡33,550,366! Nicómaco de Gerasa, matemático de Alejandría lo buscó en vano y se quejó: "Los buenos y bellos son pocos y fáciles de contar, los feos y malos están por todas partes".

¡Qué actitud tan diferente hacia los números! Hay números bellos y números perfectos y hay números feos e imperfectos. El 15 es uno de ellos ya que su contenido interno llega a 9, presume mucho exteriormente. el 16 contiene 15, presume sólo un poco, el 24 no presume para nada ya que contiene:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36$$

Es a la vez, valioso, modesto y poco pretencioso.

El número 360 juega un papel importante. Si lo vemos con la óptica antigua es un número valioso lleno de posibilidades. Contiene 810 y podemos expresar su valor en la fracción:

$$\frac{810}{360} = 2.25$$

mientras que el 24 vale:

$$\frac{36}{24} = 1.5$$

Los números perfectos todos valen 1. Por lo tanto el 360 se vuelve un número importante y no una personalidad insignificante como el 15 cuyo valor es:

$$\frac{9}{15} = .06$$

Estas relaciones surgen en todo momento en la historia de las matemáticas. En la geometría, por ejemplo, hay relaciones entre los sólidos platónicos, que para los griegos se conectaban al cosmos y a los cuatro elementos, en estas relaciones estaban lo masculino y lo femenino reflejados. En términos generales ellos vivían al mundo de los números y al mundo de las formas ligados estrechamente con el alma del ser humano.

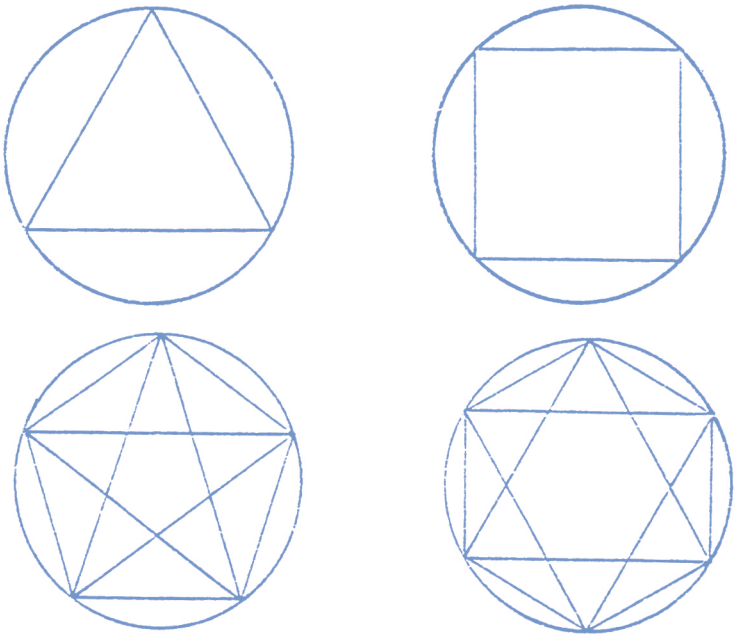
Los niños pequeños también están ligados a dichas cualidades, pero como son niños no son capaces de describir sus experiencias con palabras o relacionarlas con temas complejos como los números perfectos o los sólidos platónicos. Sin embargo, tienen el mismo ojo a la hora de medir las cosas, operan, por así decirlo, desde el mismo rincón pero se expresan de acuerdo a su edad.

Es por eso que a la hora de enseñar aritmética es importante conocer la visión de las culturas antiguas. Es una manera de prepararse para desarrollar ideas para presentarle a los niños el mundo de los números, posteriormente se pueden encontrar materiales didácticos afines a las habilidades de los niños y a su edad.

Los sólidos platónicos eran muy importantes para los matemáticos griegos. Kepler no fue el único en colocarlos concéntricamente dentro de una esfera, durante toda la antigüedad se les percibía en relación a la unidad esférica. Con el mismo ambiente podemos dejar que nuestros niños experimenten los más sencillos polígonos regulares dentro del círculo. Si nos mantenemos dentro del rango de 3 a 6 lados, para empezar, los niños nos seguirán fácilmente y podrán satisfacer su sentido de las cualidades numéricas. Podemos enseñarles a dibujar formas como estas.

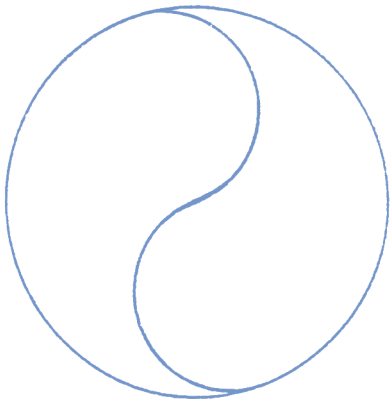
Con polígonos de cinco y seis lados los niños pueden dibujar 'estrellas' también. Esto les ayudará a dibujar figuras parejas más adelante. También se usa el color para resaltar las relaciones entre los números. Los campos correspondientes se deben colorear correctamente, de otro modo el dibujo tendrá un estilo 'harlequín' que nos aleja del propósito original.

Los alumnos de primer grado bien saben que los lados deben ser parejos para lograr una figura armónica así como lo sabían los griegos, quienes desarrollaron sólidos tridimensionales partiendo de polígonos regulares. El empeño es el mismo, las percepciones son análogas.



Sencillos polígonos regulares dentro del círculo

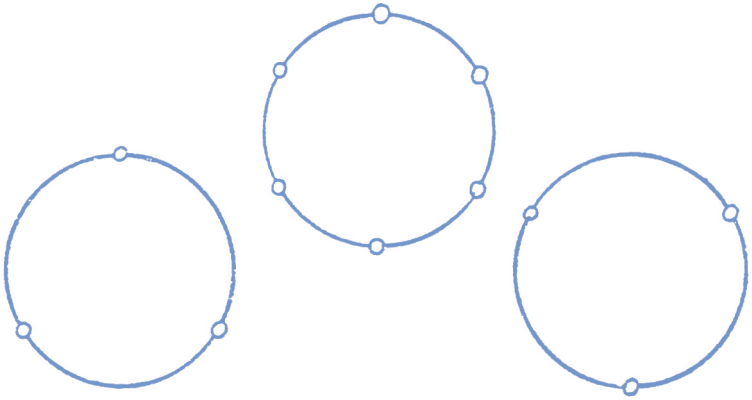
Es importante que los niños experimenten la unidad, lo completo y lo único del círculo. Primero que lo dibujen a mano alzada – el compás vendrá mucho más tarde. Después pueden practicar el número 2 así:



Ya que han dibujado un gran y hermoso círculo, les damos nueces o semillas grandes que pueden colocar sobre el círculo. Por ejemplo, les podemos dar 3 nueces y pedirles que las coloquen cuidadosamente sobre el círculo. 'Cuidadosamente' puede tener diferentes significados, y debemos aceptar todas sus sugerencias. Sin embargo, podemos ayudarles a colocar las nueces de tal manera que el círculo quede dividido en tres secciones de 120 grados – esta terminología no la usaremos con ellos.

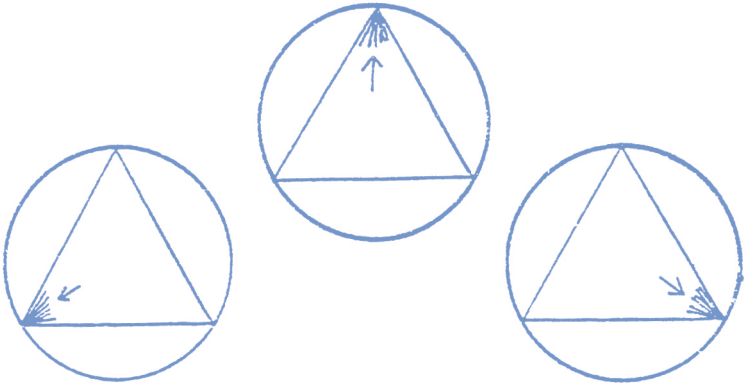
De la misma manera se puede hacer con 5 o 6 nueces.

Al observar a los niños dividir el círculo en 6 partes, por ejemplo, estamos atestiguando un actuar puramente matemático. Están desarrollando la base del pensar matemático del adulto. Si les pedimos que quiten 3 de las 6 nueces, es posible que experimenten el júbilo de ver cómo reaparece el triángulo.



Seis nueces forman dos triángulos diferentes.

Puede que apunte hacia arriba, (para muchos es más satisfactorio) o hacia abajo. Algunos ven el triángulo que apunta hacia arriba, otros ven el mismo triángulo que apunta hacia abajo a la izquierda o abajo a la derecha.



Triángulo en movimiento

Finalmente un alumno ve que el triángulo se puede desplazar. Su círculo es lo suficientemente pequeño y sus dedos lo suficientemente largos para poder alcanzar con el dedo gordo y el medio, dos nueces, y la tercera nuez con el dedo índice de su otra mano. Sus exclamaciones de júbilo atraen a los demás compañeros que ven cómo va rotando el triángulo.

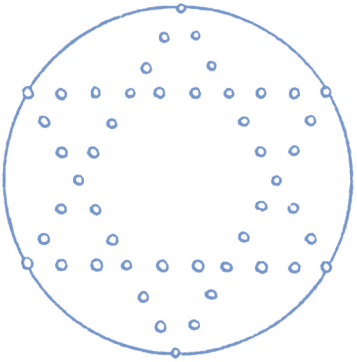
Al intentarlo nosotros mismos es fácil entender la emoción que causa. Al rotar el triángulo hay que ponerse de pie para no torcerse la mano. Esto causa conmoción en la clase – especialmente cuando todos los niños lo intentan a la vez – y el maestro debe acostumbrarse.

Dentro de los 120 grados yace la cualidad del triángulo y apela a nuestro sentido armónico. Al colocar las nueces en su debido lugar nos sentimos equilibrados, independientemente del tamaño del círculo.

La experiencia es muy diferente en el caso del cuadrado, y diferente con el pentágono.

Un hexágono es algo muy especial para la mayoría de los niños. Tras pedirles que coloquen 6 nueces les damos otro puñado y les pedimos

que delineen los dos triángulos. Es, a menudo, una experiencia profunda. Si les damos suficientes nueces aparece la siguiente figura y causará gran asombro:



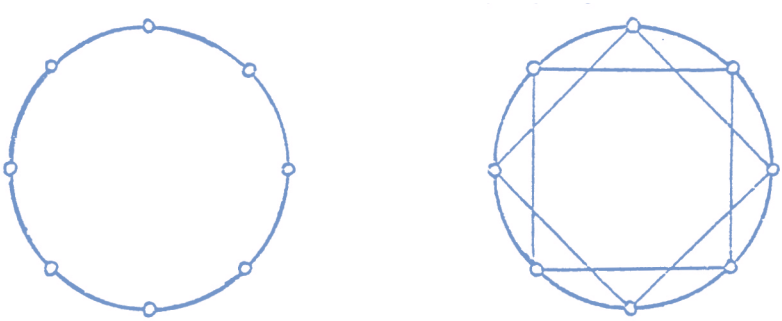
Estrella de cinco puntas hecha con nueces equidistantes.

Hay triángulos de muchos tamaños y, cuando el niño intenta emparejarlos, se crea la figura hexagonal en el centro. Esta actividad es intensa para los ojos, las manos y el cuerpo completo del niño, es tanto movimiento como equilibrio. Esta actividad vivaz desarrolla al matemático.

Vale dejar muy claro desde el principio que no se trata de revivir antiguas supersticiones, sino de enseñar las matemáticas y la aritmética desde el reino al que pertenecen, es decir, lejos de las funciones de la cabeza. Esto cumplirá uno de los mayores deseos del niño: permanecer en el mundo del movimiento físico durante el tiempo que las leyes del desarrollo pidan.

¡Ahora a colocar 4 nueces en el círculo, y luego otras 4 más! ¡Ahora a dibujar un círculo alrededor de los dos cuadrados con más nueces!

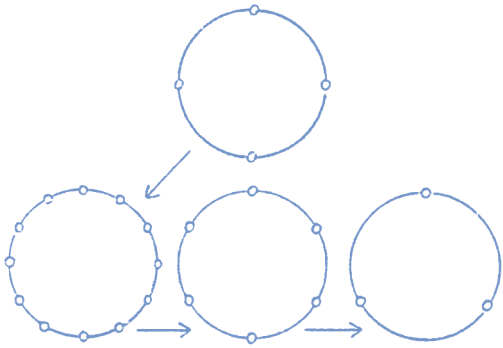
Ahora los triángulos de los bordes son muy diferentes. No se parecen a los del hexágono. No son tan lindos y las nueces no están tan bien colocadas, no se las puede colocar de manera más uniforme porque



Ocho nueces crean dos cuadrados.

los lados no son iguales y no se pueden medir unos con otros. Las manos de los niños forcejean con este problema irracional. No saben lo que está pasando y no se lo diremos aún, sin embargo, sus ojos y dedos lo han descubierto. Quizá digan "que raro…" pero el maestro sabe que retomarán este problema en 6 o 7 años.

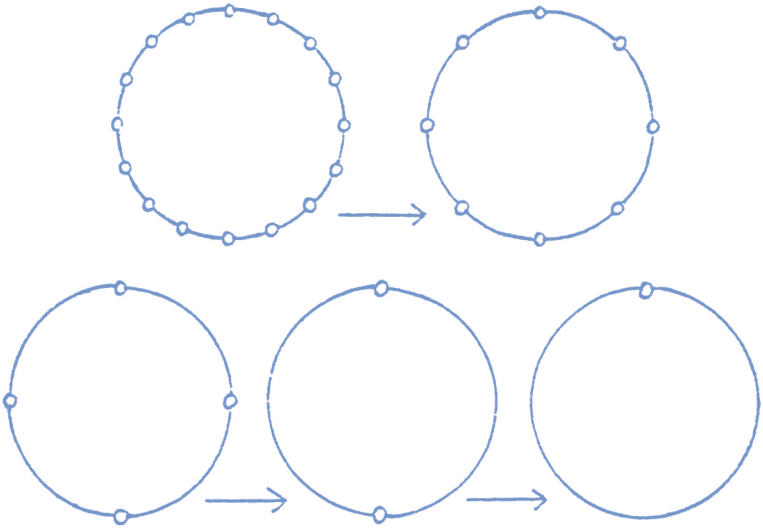
Ahora hacemos el cuadrado otra vez. Ponemos 2 nueces más en cada espacio. ¡Parece un reloj! Si quitamos una nuez si y otra no regresa el triángulo. Del reloj salen cuadrados y triángulos. Este es un descubrimiento importante: Un círculo de 12 nueces ¡Contiene muchos acertijos!



Del 4 al 6 y al 3 pasando por el 12

Ahora ponemos 5 nueces en el círculo y luego una nuez en cada espacio, eso nos da un decágono. Después de mirarlo bien quitamos una nuez sí y otra no, dos veces, y vemos qué pasa. La primera vez funciona pero la segunda no. Algo se ha aprendido acerca de los números impares y los números pares.

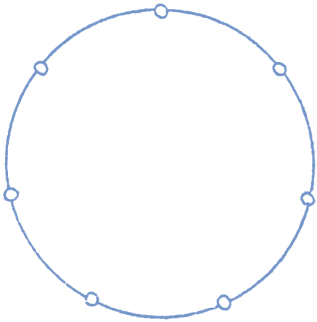
Ponemos 16 nueces en el círculo – no es tan difícil – y luego podemos quitar nueces alternando muchas veces. Algunos niños dirán que el 16 es un número muy par, han comprendido lo que significa 'par'. El 20 no es tan par.



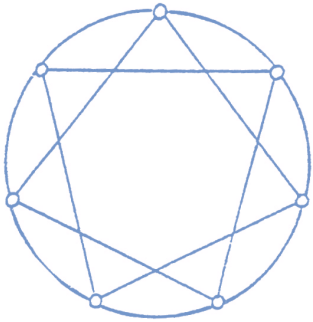
El 16 es un número extraordinariamente par.

Al llegar a la penúltima figura, muchos alumnos preguntan si podemos seguir. Si hay 'uno sí y uno no' cuando sólo quedan dos nueces.

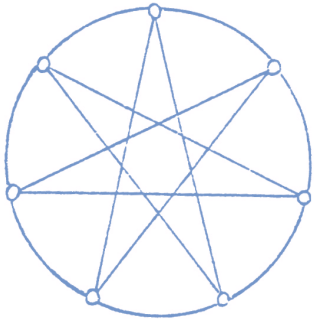
Un día los niños reciben 7 nueces cada quien para colocar sobre su círculo. Inmediatamente reconocen algunas de las dificultades que tuvieron al colocar 5 nueces. Se acuerdan que fue de ayuda acostarse en



No es fácil colocar 7 nueces en el círculo.



Conectamos una nuez sí y otra no.



Conectamos cada tercera nuez.

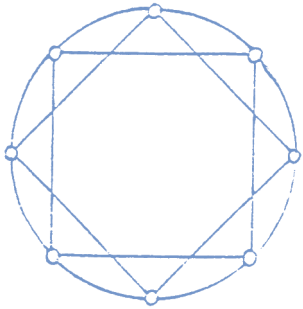
el suelo con brazos y piernas extendidos y entender que junto con su cabeza, sus extremidades formaban una estrella de cinco puntas. Después no fue tan difícil colocar las nueces en el círculo.

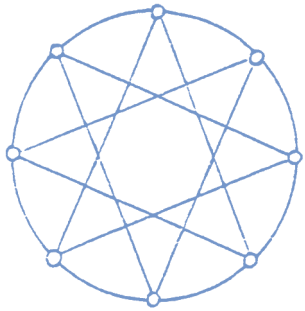
Sin embargo, con 7 nueces nos faltan dos extremidades. La cabeza es fácil colocarla, hay que juntar las piernas un poco e imaginar un par de alas.

Finalmente nuestra figura humana alada aparece en forma de un bellos heptágono. Si tratamos de quitar una nuez sí y otra no, veremos que no funciona, así que con nuestros dedos, y después con un lápiz, dibujamos el camino que hubiéramos hecho al quitar una nuez sí y otra no. Aparecerá algo emocionante.

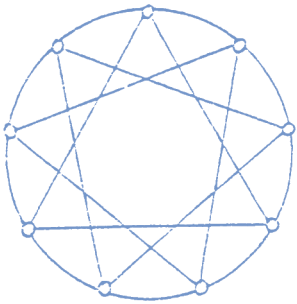
Y es más emocionante si vamos de tres en tres nueces. Difícil pero bien vale la pena.

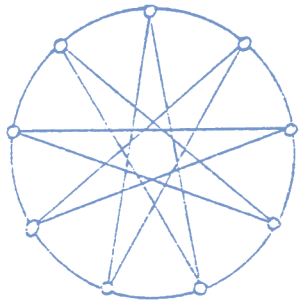
Al experimentar de la misma manera con el octágono obtenemos una estrella compuesta de dos cuadrados y también una estrella de ocho puntas trazada con una línea contínua.



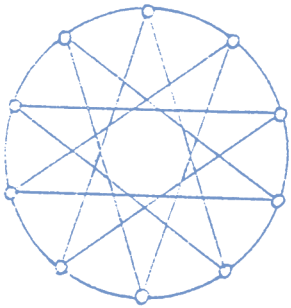


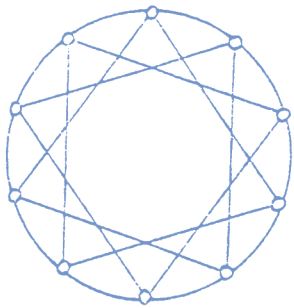
Pasa los mismo con el nonágono: tres triángulos o una línea contínua.





Con el decágono tenemos dos estrellas de cinco puntas y una línea contínua.





De esta manera experimentamos que las estrellas de cinco y siete puntas solo surgen de una línea contínua, igual que las estrellas de 11 y 13 puntas. ¿Por qué?

Los alumnos aprenderán más acerca de esto en el futuro, pero ya se han acercado a muchas preguntas relacionadas a los números primos.

La estrella de seis puntas es un caso especial, ya que no puede surgir de una línea contínua, es necesario crearla con un triángulo que apunte hacia arriba y otro que apunte hacia abajo. No es casualidad que el pueblo judío percibió algo especial en esta estrella, y que posee para ellos, un profundo significado simbólico. Sin embargo, aquí lo que nos concierne son las cualidades que distinguen esta estrella de las demás.

Estos juegos se pueden jugar en paralelo con ejercicios llevados a cabo en un salón lo suficientemente grande que los niños puedan formar un círculo tomándose de las manos. Quizá la mitad de la clase forme el círculo, ya que es valioso alternar entre la observación y la actividad.

Hagamos un círculo con 12 alumnos. Si cada segundo niño da un paso al frente o se sienta, la imagen cambia de inmediato. Si cada tercer niño da un paso al frente, reconoceremos al cuadrado que surge. Con cada cuarto niño aparece el triángulo, y observamos que todo esto funciona de maravilla cuando hay 12 en el círculo. Descubrimos que con cada quinto niño no funciona, el 12 y el 5 no tienen mucho en común. Cuando cada sexto s+niño da un paso al frente, surge algo, pero no es del todo emocionante.

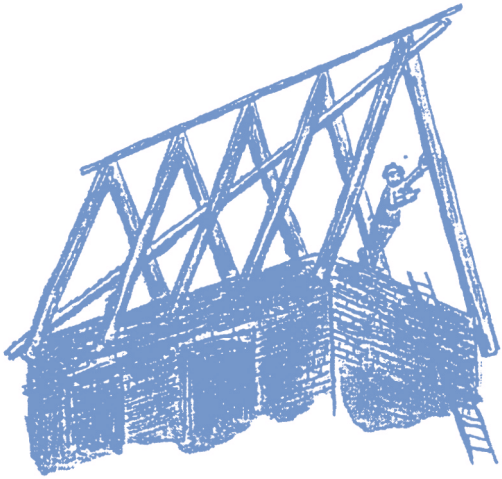
Así, descubrimos que los números se relacionan de maneras especiales. Si el círculo es de 13, no funciona que dé un paso al frente cada tercer o cada cuarto o cada quinto niño. Si lo hace cada quinto niño en un círculo de 15, sí funciona, ¡Qué bello el triángulo que surge! el 15, el 5 y el 3 se llevan muy bien.

Regresando al círculo de 12, pidámosle a otro alumno más que camine alrededor del círculo con un ovillo de estambre o cordel, y que cada cuarto niño lo sujete. De inmediato hay un bello triángulo. También podemos crear un cuadrado si cada tercer niño sujeta el cordel, 4 y 3, 3 y 4 ¡Qué fácil de recordar!

Si tenemos dos ovillos de cordel podemos formar una estrella de seis picos compuesta por dos triángulos. Primero hacemos el primer triángulo y lo posamos en el suelo mientras hacemos el segundo. Después elevamos los dos a la misma altura y la estrella aparece, de extraordinaria belleza. Entonces transformamos el ejercicio en uno de concentración al pedirle a los niños que roten o giren la estrella una vuelta completa. Habrá silencio total en el salón mientras hacemos esto. Los 6 alumnos que no están sujetando el cordel pueden dar un paso atrás y delimitar el círculo. Los otros se aseguran de mantener el cordel tenso y girar a la misma velocidad hasta alcanzar el punto de inicio. Los niños que delimitaban el círculo ahora lo giran. Ahora viene los más difícil, pasar la estrella de un grupo a otro sin echarla a perder. Es posible que un grupo de tercer grado logre hacer esto.

Este es un juego muy serio donde se aprenden muchas cosas. La figura contiene seis triángulos más pequeños alrededor de la circunferencia, que idealmente, deben ser equiláteros. También deben estar colocados de cierta manera que su relación no se pierda. La forma cambia contínuamente al girarla, y para poder corregir los errores sobre la marcha, los niños tienen que percibir las posiciones de sus vecinos. Por medio de este ejercicio, al observar y calcular lo que está sucediendo, los alumnos entrenan las habilidades matemáticas prácticas que forman la base, a nivel pensamiento, de la habilidad matemática futura.

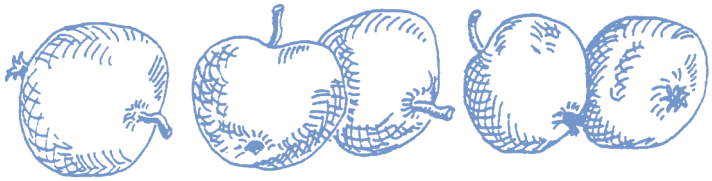
No es fácil mantener los cordeles tensos todo el tiempo. Hace falta mucha observación de los otros dos compañeros que sostienen el triángulo y mucha cooperación. Eso en sí mismo es sumamente valioso. Es posible que uno de los cordeles tienda a combarse constantemente con lo cual el triángulo deja de existir. Para ayudar a las manos a sentir la figura podemos darle a los niños tres largos palos en lugar de cordel. Ellos se percatan que el triángulo se ha estabilizado y no se puede modificar en lo absoluto. Las mismas manos comparan dos experiencias muy diferentes y 'saben' con varios años de anticipación mucho acerca de la construcción del triángulo, de la congruencia y de porqué a menudo, el carpintero coloca una viga diagonal sobre los travesaños.



Una viga diagonal impide que los travesaños se colapsen.

Estos ejercicios para niños de grados inferiores, se pueden suplementar ilimitadamente. Es posible preguntarnos ¿A qué parte del mundo de los números pertenecen? Podemos, por ejemplo distinguir entre números cardinales y ordinales. El número cardinal 5 de representa

con 5 manzanas. El ordinal 5 es una sola manzana; la quinta en la fila de manzanas a la cual llegamos contando.



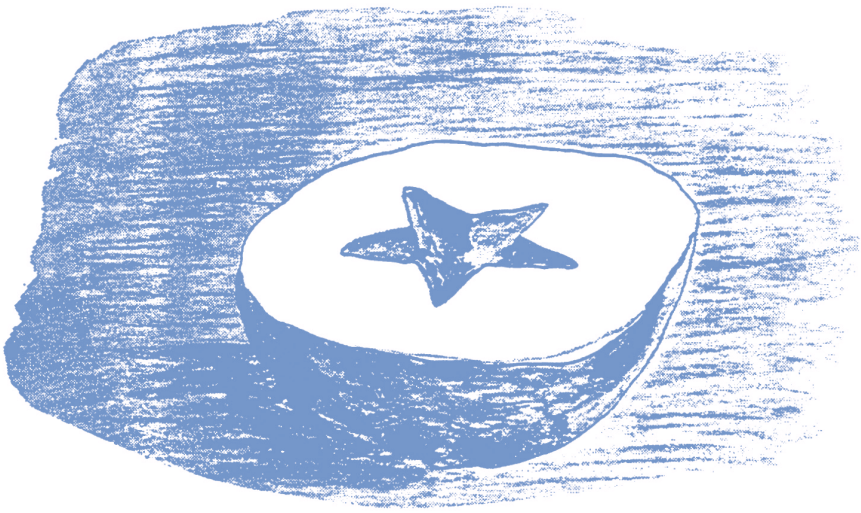
La fruta de la sabiduría, para bien o para mal.

Los números que hasta ahora hemos mencionado no son ni cardinales ni ordinales. Contienen dentro de ellos ambas características, pero existen en una dimensión muy diferente.

Nos acercamos a esta dimensión cuando decimos, por ejemplo, que el 5 es un número primo. Esto lo caracteriza de manera independiente de si es una cantidad o está en un cierto orden. Su vecino, el 6, no es un número primo, es un número perfecto. Ambos son especiales, tienen una identidad individual que no tiene nada que ver con que uno sea mayor que otros. El 5 es un número primo, y esto, es parte de su ser.

Esto también se puede vivir al cortar una de las manzanas que mencionamos a la mitad, no como si quisiéramos compartirla, sino cortada por su ecuador. Si nunca lo han hecho, háganlo ahora y comprenderán la cualidad del 5 un poquito mejor.

La manzana es el fruto del árbol de la sabiduría, y ha sido utilizada a través de los siglos para entender los números cardinales y ordinales mejor. El maestro dice "tomen 5 manzanas…" y pasa a explicar la diferencia entre los tipos de números. Eso es una tradición y así debe ser. Sin embargo, siempre se olvidan de cortar la manzana transversalmente después para ver la esencia del 5. En su fondo no es ni cardinal ni ordinal, es un poder activo en sí mismo capaz de crear los dos.



Una manzana cortada por su ecuador -
¡Casi no se atreve uno a comérsela!

Es necesario encontrar una palabra que describa el aspecto cualitativo de los números. Además de números cardinales y ordinales, quizás deberíamos tener 'números esenciales' o 'números cualidad' o 'números individuados' o ¿Cómo les llamamos?

Toda la matemática básica trae este mensaje, y es por ello que nuestros niños tienen que experimentar, de uno u otro modo, la cualidad de los números – ya que en lo profundo de su ser los niños tienen lo que se puede llamar una necesidad histórica. Esto no significa una necesidad de aprender historia – aunque eso también vive dentro de ellos – necesitan ver con claridad en lo que les rodea, aquellos aspectos que fueron importantes en épocas culturales previas.

El 'documento azul' (ver el prólogo) dice que la currícula en las escuelas de gobierno está saturada, y ya que esto no es positivo, algo del material que contiene meramente por tradición, dice, debe ser eliminado. Esto bien es verdad, pero es fácil amputar a tal grado que las fuentes

de energía del niño se vean comprometidas. Estas fuentes merecen más consideración de la que normalmente se les da. Es un poco atemorizante leer que "únicamente la reducción severa de contenido anticuado" llevará a un crecimiento en la investigación científica. El 'documento azul' dice que la currícula debe ser actualizada constantemente. Estas actualizaciones se pueden llevar a cabo en cualquier momento (sin alterar el objetivo escolar de impartir confianza y armonía), al seguir las nuevas tendencias.

Si bien es cierto que hay mucho material que se puede desechar ya que no se conecta con el interior del niño, cuidado con sembrar las semillas de la inquietud y el nerviosismo si desechamos en base a que el niño posee la misma estructura interna que el adulto. El problema se agravará si se ignora el proceso de metamorfosis y la necesidad de tradición.

El júbilo del niño ante el cuento de hadas está íntimamente relacionado a lo anterior, a menudo nos da la impresión que nuestros niños se sienten más en casa en el mundo de los cuentos de hadas que en el mundo tecnológico que, hábilmente, construimos a su alrededor.

En los más antiguos mitos, leyendas y cuentos de hadas está el alimento para el interior 'historico' del niño que ya mencionamos. Este le conecta a épocas culturales previas más que a nosotros, ya que somos sencillamente miembros de una civilización moderna.

Es por eso que los cuentos de hadas de épocas pasadas, a menudo contienen números que expresan sus cualidades, es decir, ni cardinales ni ordinales, poderes creativos natos que después se expresan como uno u otro tipo de número. Estos 'números esencia' aparecen frecuentemente en los cuentos de hadas, ya sea como dos hermanos, como doce cisnes, cuatro vientos o tres hermanas. Es posible caer en el misticismo numérico, y debemos evitarlo al tiempo que reconocemos un germen de algo eterno que sigue anclado en un nivel muy profundo de nuestro ser.

En este cuento de hadas de la India, experimentamos el número original 4. Se trata de cuatro hermanos y surge la pregunta ¿Es posible imaginarse que los cuatro hermanos fueran cinco? O ¿El número de hermanos se relaciona al orden de las cosas descritas que sólo puede ser cuatripartita donde la vida orgánica muere si se usa el tres o el cinco? Si esta última pregunta es la verdadera entonces el número es un 'número esencial'. Quizá hayamos encontrado un nombre para ellos, números orgánicos o números enteros. Estos nombres nos dan un indicio del poder creativo que vive tras la entereza orgánica. Así es el número cuatro en este cuento de hadas llamado 'El León'.

Erase una vez, había cuatro hijos brahmanes. Los hermanos se querían con gran devoción y decidieron viajar juntos para conocer los reinos aledaños y hacerse de fama y fortuna. Tres de los cuatro hermanos habían escogido senderos de estudio profundo y completo, y se habían convertido en expertos magos, matemáticos, astrónomos y alquimistas – la más difícil de las ciencias ocultas. El cuarto hermano no había estudiado nada y sólo poseía su sentido común.

Un día, al ir caminando, uno de los hermanos eruditos dijo: "¿Por qué se aprovecha nuestro hermano ignorante de nuestra sabiduría? No es más que una lastra en nuestra expedición. Nunca obtendrá favores de príncipes y reyes y, por lo tanto, será una vergüenza para nosotros. ¿No sería mejor que regresara a casa?"

Pero el hermano mayor contestó: "No, deja que comparta nuestra buena fortuna. Después de todo es nuestro querido hermano, con certeza le podemos encontrar un trabajo que logre hacer sin deshonrarnos".

Y así, continuaron juntos su viaje. Al poco tiempo llegaron a un bosque y vieron los viejos huesos de un león tirados en el camino. Los

huesos eran blancos como la leche y duros como piedras ya que llevaban mucho tiempo al sol.

El hermano que antes había acusado al cuarto hermano de ser ignorante dijo: "Vamos a mostrarle a nuestro hermano el valor del conocimiento, démosle vida a estos huesos y creemos un nuevo león, así se sentirá avergonzado de su falta de educación. Con unas cuantas palabras mágicas puedo juntar estos huesos secos colocar cada uno en su justo lugar". Dijo las palabras y los huesos inmediatamente se colocaron traqueteando en su lugar, de manera que el esqueleto quedó completo.

"Yo, dijo el segundo hermano, puedo estirar los tendones de hueso a hueso, cada uno en su lugar, con sólo decir unas palabras. Entre los tendones haré crecer músculos rojos como la sangre. Y crearé vasos sanguíneos, fluidos, glándulas y tuétano". Dijo las palabras y a sus pies yacía el cuerpo del león, completo, peludo y enorme.



El tercer hermano dijo: "Yo con una sola palabra puedo calentar su sangre y hacer latir su corazón para que la bestia viva, respire y trague como los demás animales. Pronto lo escucharán rugir".

Pero antes de que pudiese decir la palabra el cuarto hermano le tapó la boca con su mano y gritó: "¡No! ¡No digas la palabra! Es un león y si le das vida nos comeŕa".

Pero los demás se burlaron de él y le dijeron: "Vete a casa tonto Qué sabes tú de ciencia?"

El cuarto hermano entonces dijo: "Por lo menos denme tiempo para subirme al árbol antes de animar al león" y los demás dijeron que sí.

Ni bien se había subido al árbol cuando la palabra fue pronunciada y el león se empezó a mover y abrió sus grandes ojos amarillos. Se estiró, se incorporó y rugió. Se dirigió hacia los tres hermanos y se los comió enteros.

Cuando el león hubo partido, el joven que no sabía nada de ciencia, se bajó del árbol, sin un solo rasguño, y regresó sano y salvo a su casa.

Claro está que nunca se debe de interpretar simbólicamente un cuento de hadas para los niños, hay que dejar que el cuento mismo haga su propio efecto. Simplemente hay que confiar que el poder que contiene se transformará junto con el niño y en el futuro, se convertirá en su compañero. Por lo mismo sólo mencionaremos que este cuento de hadas habla de la experiencia esencial humana, todo lo que nos rodea se puede repartir en cuatro reinos: el reino inerte mineral, el reino vegetal lleno de vida pero sin movimiento, el reino animal móvil capaz de expresarse con sonidos y deseos, y finalmente, el reino humano que se yergue sobre los otros tres gracias a su habilidad (por ejemplo) de prever y planear. El

animal – al final del cuento – contiene los tres reinos inferiores en sus ser, y por lo tanto, se traga a los tres hermanos. El menor no sólo se yergue sobre ellos, sino que sobrepasa su propio nivel y regresa a su hogar.

El cuento ejemplifica un verdadero cuarteto. No habla del 4 que es uno más que el 3 y uno menos que el 5, habla del poder estructural que el 4 recibió, en el comienzo de los tiempos, de la mano del Creador.

¡Quizá también podamos llamarlos 'números estructurales'!

El cuento del león y los cuatro hermanos se puede contar en muchas ocasiones, pero ciertamente es apropiado para el primer grado. Al contarlo, podemos hablar con los niños de otras cosas en sus vidas que les ayudan a experimentar el número 4. El ritmo de las estaciones del año, por ejemplo. Incluso pueden dibujar un paisaje donde se vean juegos de estación y donde los campos, los árboles y los arbustos estén todos vestidos de sus atuendos estacionales.

Otras cosas también se relacionan al número 4 de manera que no lo hacen otros números. Por ejemplo podemos hablar con los niños de por qué los libros tienen cuatro esquinas. Hay que pensar qué pasaría si tuvieran tres o cinco o más esquinas. Imaginemos cómo los colocaríamos en los estantes, cómo los meteríamos en las mochilas, cómo los forraríamos para hacer un regalo. ¡Qué extraño sería ver a la gente en la biblioteca usando libros triangulare o pentagonales!

No, los libros tienen que tener cuatro esquinas, podrían tener ocho, pero necesitan posarse sobre el librero firmemente. Imaginemos ¡Qué difícil sería imprimir las hojas de un libro octagonal!

Es importante ver que este aspecto de la vida cotidiana se incluya de manera que los niños experimenten las relaciones numéricas de manera accesible a su edad. El humor, con calidez y simpatía, siempre es apropiado, hasta en las matemáticas.

Nuestros propios cuerpos son una mina de oro para vivir los números, en especial con niños pequeños. Ellos aún ven sus cuerpos de maneras no egocéntricas. Al llegar a los 12 o 13 años esto cambia. Es así que para los niños más jóvenes el resaltar las relaciones numéricas que vive en sus cuerpos en una de las mejores maneras de experimentar números cualitativos.

Podemos contarles de nuestras cuatro extremidades, de cómo sirven a nuestro cuerpo y cómo se relacionan con el entorno. Contémosles también del 5 y el 3 en nuestro cuerpo. Más adelante usaremos el 5 de los dedos y el 2 de las manos como números cardinales ¡Pero no nos detengamos ahí! Digamosles que miren sus manos como las bellas esculturas que son. Que sientan sus manos en posición de rezo, que perciban la unidad que se forma cuando nos damos la mano en un saludo.

Vale recordar que quizás más adelante nos toque enseñarle a estos mismos niños historia del arte, entonces les hablaremos de las manos de Durero, de Miguel Ángel y de Leonardo. Esas obras de arte no evocan en nosotros el contar cinco dedos, más bien son una expresión del alma que muestran claramente que más allá de los números cardinales y ordinales existe otro tipo de número.



Estudio de las Manos
Alberto Durero

El número 3 está relacionado a los tres Reyes Magos y a la división del cuerpo en extremidades, tronco y cabeza. En el reino de los animales, plantas y minerales también se manifiestan las ‘esencias’ de los números.



Estudio de las Manos
Alberto Durero, 1506

Por ejemplo el 6 vive en el panal de las abejas, en las monocotiledóneas y en los cristales.

La estructura de la flor es muy inspiradora, sin embargo las relaciones botánicas no se deben ver detalladamente en primer grado. Aprovecho para pedir que no traigan flores y plantas al salón para diseccionarlas y contar los pétalos o semillas. En esta edad temprana, los niños deben experimentar la naturaleza paseando en ella. Que empiecen así. Más adelante al regresar al salón podemos preguntarles qué observaron durante el paseo, así sus habilidades de observación se van afinando.

En las primeras etapas de la instrucción de la aritmética, evitemos enseñar los números cardinales por medio de la estructura de la flor, y enfoquémonos en los números estructurales en sí. En los poderes creativos que obran cuando una flor se está formando y un cristal lentamente emerge. Enseñemosles acerca de los poderes que crean estas formas. Poderes que

existen por sí mismos en la naturaleza como emanaciones puras y que han existido mucho antes de que el razonamiento o conteo humano empezara, aunque los adultos simplemente los cuenten y clasifiquen como números.

Es importante darle a los niños experiencias naturales de este tipo antes de enseñarles a contar. Recordemos el consejo de Pestalozzi que mencionamos anteriormente (en el capítulo 2):

"Es una gran virtud humana el esperar sin impaciencia,
hasta que todo madure".



Manos Rezando
Alberto Durero

Capítulo 4

RITMO Y NÚMEROS

Hasta ahora hemos hablado principalmente de ejercicios basados en la forma y, por lo tanto, en la dimensión del espacio. Ahora pasemos a la dimensión del tiempo, y vamos a añadir ejercicios que se enfocan en el pulso y el ritmo.

Es importante abarcar ambos aspectos en cada clase ya que cualquier grupo grande de alumnos siempre estará compuesto por algunos niños cuyas habilidades son predominantemente visuales y otros predominantemente auditivas. Sin embargo, lo principal es que estos juegos rítmicos forman la base de las tablas de multiplicar y de muchas otras relaciones matemáticas. Si bien los ejercicios anteriores estaban íntimamente relacionados a los números cardinales, estos ejercicios rítmicos lo están a los números ordinales.

Por último, si bien no menos importante, estos juegos satisfacen una profunda necesidad infantil: sentir ritmo en su entorno – algo que tristemente no abunda hoy en día. Antes el día se dividía naturalmente, por ejemplo tiempo de trabajar, de comer, de jugar, de leer, de estar tranquilo, de dormir. Estas divisiones hoy en día son vagas e inciertas, y el resultado es una enorme inseguridad que se manifiesta como nerviosismo e inquietud. Por lo tanto, es importante encontrar nuevas áreas de ritmo. Hablando de aritmética, cultivar este espacio es vital ya que la aritmética

y el ritmo están estrechamente vinculados, aunque este vínculo a menudo se ignore.

Las matemáticas y la música van juntas, las leyes de la acústica lo demuestran claramente. También es sabido que muchos matemáticos ilustres también eran músicos, y que sentían que su trabajo musical inspiraba su actividad intelectual. En la música experimentamos las matemáticas de manera inconsciente. Gottfried Leibniz (1646–1716), filósofo y matemático alemán, lo expresó de esta manera:

> La música es el ejercicio matemático del alma, en el que el alma no percibe que se trata de números. El alma adquiere conocimiento por medio de actividades no percibidas o poco claras que la atenta observación cotidiana no percibe. Aquellos que creen que nada pasa en el alma si no son conscientes de ello, están equivocados. Aunque el alma misma no perciba que está calculando, siente no obstante los efectos que estos cálculos ejercen, ya sea el júbilo de la armonía o la intranquilidad de la discordia...

En la escuela siempre es emocionante la enseñanza de la acústica, por ejemplo en sexto grado al descubrir que se puede hallar el punto medio de una cuerda musical usando únicamente el oído. Cuando el oído reconoce la octava del tono, el dedo ha llegado a la mitad. Un oído bien desarrollado es sumamente discerniente, también es fácil encontrar dos tercios y tres cuartos con tan sólo escuchar los intervalos.

Sin embargo, la música no sólo se trata de tonos, sino también de ritmo y pulso. Y es aquí donde los jóvenes niños esperan para entrar en acción ya que les encanta mover su cuerpo y sus extremidades.

Tal como dijimos anteriormente, la aritmética es una materia que el adulto vincula con la destreza intelectual, por lo que siempre ha sido necesario hacer un gran esfuerzo por presentárselo a los niños de manera aceptable. Esta situación nos caracteriza a nosotros más que a los niños. Es decir, nuestra falta de entendimiento de los niños y de las etapas de metamorfosis. Si entendiéramos mejor, empezaríamos a enseñar aritmética en el gimnasio escolar, ya que la aritmética comienza con el cuerpo, los brazos y las piernas.

La aritmética comienza en el caos. Así como todas las mitologías antiguas nos dicen que el mundo emergió del caos, y que el cosmos poco a poco se fue formando. Así pasa con las matemáticas y la aritmética. Cuanto más profundos los estratos del ser humano que logremos activar, más firmes serán los cimientos del cosmos.

Leibniz sabía esto. Era consciente que en las profundidades del alma ocurre un proceso de suma importancia para el individuo completo, y que reconocemos muy poco de lo que, como individuos completos, verdaderamente somos.

Leibniz fue uno de los más grandes matemáticos. Si el destino hubiera decidido otra cosa, podría haberse convertido en un gran ¡Instructor de natación! En ambas áreas es vital saber que el movimiento visible en la superficie no lo es todo, y que por debajo, los movimientos que nos llenan tanto de júbilo como de tristeza, son enormemente importantes, aunque estén escondidos o sean difíciles de ver.

Los niños experimentan las matemáticas por primera vez así, debajo de la superficie, inconscientemente como actividad perceptible 'poco clara, poco notada'. Nuestra tarea es encontrar un salon de clases propicio para estas primeras experiencias matemáticas, una 'alberca' adecuada, por así decirlo. ¿Por qué no usar el gimnasio escolar, por ejemplo?

Al llegar, nos damos las manos y formamos una gran rueda. Giramos al tiempo que aprendemos a no hablar, a escuchar el sonido de los pies sobre el suelo.

Al escuchar los pies, los niños gradualmente se moverán al mismo ritmo. Aprendemos a hacer hablar a los pies, ya sea más fuerte o más calladito, a veces cambiando abruptamente y a veces gradualmente. No pasa mucho tiempo antes de que logremos seguir las señas del maestro. A veces alza su mano, a veces la baja, los pies pisotean, luego pisan suavemente. Aprendemos a diferenciar el sonido de los talones y de las puntas.

Pero tenemos más que talon y punta – tenemos un pie derecho y un izquierdo. Se mueven hacia adelante y hacia atrás, y también ¡Hacia los lados! Es importante estar conscientes de esto, ya que lo necesitaremos más adelante.

Ahora practicamos con la izquierda y la derecha. El pie derecho pisa fuerte y el izquierdo suavemente. Si nos movemos con las manecillas del reloj estaremos pisoteando hacia el centro de la rueda y pisando suavemente hacia afuera. La 'música' que surge es muy diferente a la anterior, al escuchar ambas nos damos cuenta que tenemos dos melodías.

Podemos tocar la misma melodía sin desplazar el cuerpo, marcando el ritmo en el mismo lugar. Podemos empezar caminando la melodía hacia adelante y, al escuchar la señal, marcarla sin avanzar, procurando que no cambie. Así aprendemos a escuchar. Le pedimos a un alumno que se pare fuera de la rueda, de espaldas, y le pedimos que escuche la diferencia, así tendremos que tener aún más cuidado de que nos salga perfecto.

Ahora nos volteamos todos hacia el centro al tiempo que pisamos este ritmo, pesado/ligero, pesado/ligero. Esto es más difícil, ahora no podemos seguir los movimientos de la persona enfrente, al contrario, la persona frente a nosotros, al otro lado de la rueda, parece estar haciendo

lo opuesto, aunque en realidad está haciendo lo mismo. No es fácil y sin embargo, es parecido al 'entrecruce' que hacemos todos los días al darnos la mano derecha en un saludo.

Puede crearse confusión. También es interesante mirar la rueda y ver como el movimiento cambia lentamente de una persona a otra, de la persona en frente que parece hacer lo opuesto hasta llegar al vecino que está haciendo lo mismo que nosotros.

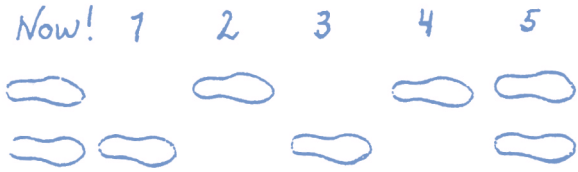
Finalmente llegamos a la parte más difícil. Los pies hacen lo mismo, pero una persona a la vez: ligero/pesado, luego su vecino, etc. No es fácil estar parado sin moverse mientras otro se mueve, y cuando llega el turno a menudo se pisa demasiado rápido, suena mal. Poco a poco, va saliendo mejor, y al final, ni siquiera hay que pensar en lo que se está haciendo, la melodía le dice qué hacer a nuestros pies.

Los primeros ejercicios de conteo se les pueden presentar a los niños en el primer juego, aquel donde escuchan el ritmo. Siempre hay niños que saben contar antes de haber empezado a r a la escuela, los menos hábiles rápidamente aprenderán a hacer el ejercicio. Empezamos contando hasta diez, dando un paso por cada número contado. Al llegar a diez paramos con los pies juntos. Es el mismo juego que yo jugaba de pequeño, donde contaba 10 - 20 - 30 - 40… hasta el 100 donde me tiraba de espaldas al mar, sobreponiéndome al temor del agua fría.

Aquí, aterrizamos con los pies juntos en el diez y nos miramos orgullosamente. También podemos parar en el ocho, sin embargo es más difícil ya que es necesario saber con anticipación lo que sigue ¡Y el ocho llega mucho antes de lo esperado!

El cinco llega antes aún, pero una vez que lo hemos aprendido bien lo podemos intentar de reversa, diciendo 5 - 4 - 3 - 2 - 1. ¡Qué difícil al principio! Las piernas están casi congeladas, como si le diese miedo al

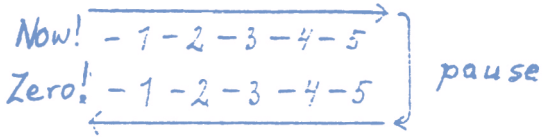
pie de posarse en el suelo. Finalmente lo logramos, algunos quizá hasta den un paso extra y digan 'cero'. No importa – todos lo intentamos y saltamos con los pies juntos en el 'cero'.



Al cabo de un tiempo, todos lo logramos. El maestro dice 'ya' y los niños entran en acción:

¡Ya! 1 - 2 - 3 - 4 - 5 5 - 4 - 3 - 2 - 1 - cero.

Más adelante hablaremos de las pequeñas palabras 'cero' y 'ya'



Habiendo contado hasta diez, el próximo paso es subir hasta veinte, es más difícil. Si permitimos que los niños de primer grado se familiaricen con las nuevas palabras al caminar y decir rimas numéricas, pronto contarán hasta veinte con certeza. En Español, Inglés y Alemán, es más fácil contar hasta veinte que en Danés. Si aprovechamos las clases de idiomas para que los niños saboreen los componentes de las palabras, y empiecen a deletrearlas, pronto hallarán la conexión entre dos y doce, tres y trece, cuatro y catorce, etc. Algunas palabras quizá sean difíciles de comprender, pero con la ayuda de los pies y de las rimas, todo se dará.

Ahora los niños están felices de poder decir tantos números, uno tras otro, sin interrupción. Hay algo especial que pasa al contar series de números. Mucho de lo que dice un niño de siete años es correcto de acuerdo a ciertos adultos y erróneo de acuerdo a otros adultos ¡Las mismitas palabras! Al escuchar la misma historia, algunos adultos niegan con la cabeza e interrumpen al niño, otros sonríen y asienten. Cuando contamos es diferente. No tenemos opiniones al respecto. Una vez aprendido el conteo todo el mundo concuerda. Quizá se cansen de escucharlo muchas veces, pero les gusta escucharlo por lo menos una vez, y si interrumpen no es porque hemos dicho algo erróneo, sino por otra razón.

Contar en secuencia es una de las experiencias fundamentales en la vida del niño, apenas existe quién no haya sentido el júbilo de contar en voz alta. Esto es porque al niño le satisface recontar historias y experiencias. Contar y recontar tienen una base común. Todos conocemos la curiosidad que lleva a los niños a preguntar 'por qué' hasta llegar al absurdo, de tal modo que debemos detenerlos porque nos cansa, si por ellos fuera seguirían por siempre. Incluso puede que el niño se sienta incómodo pero no sabe parar y finalizar su propio juego. Con los números es diferente, nunca se acaba en el absurdo. Es maravilloso saber que, si contamos con la energía necesaria, podemos contar indefinidamente sin alejarnos de la realidad. Al decir un número ya sabemos que espera el siguiente, hasta sabemos cómo se llama. Si nos equivocamos no sólo nos corrigen los gruñones, sino también los amigables. La corrección siempre es la misma, no hay desacuerdos. En la aritmética no hay discusiones. Si no no entiende algo ahora, lo entenderá después – siempre y cuando le interese, claro está. El entendimiento personal corresponde al entendimiento general, acordado por todos. Un acuerdo que no se alcanza por el camino del voto, sino por el camino del trabajo intenso.

En otros países los números tienen diferentes nombres, puede que suenen distinto, pero concordamos con su significado. Tanto sus nombres como los nuestros comparten una sola realidad – nuestras diferentes expresiones dicen los mismo. Así, la realidad resulta ser algo extraño, algo que nos atañe a todos y también nos aleja por completo.

Todo niño intuye esto, tras el júbilo espontáneo de recitar números yace la semilla de la seguridad que da conocer una realidad compartida por todos. Una realidad que no nos es impuesta y que aceptamos porque entendemos que aquí empieza la única libertad duradera que nunca viola la libertad del otro y no causa desacuerdo.

Por lo tanto, dejemos a los niños contar y contar. He aquí su primera oportunidad de tocar conscientemente el infinito, y esta experiencia es un paso importantísimo para apreciar de manera viva y útil las matemáticas.

Ligado al conteo está el sistema decimal con el cual los niños deben familiarizarse, y hay infinidad de maneras de hacerlo. Si tomamos como punto de partida su júbilo al sonar el lenguaje, podemos usar este ejercicio de 'corredor numérico'.

El 'corredor numérico' es dos cosas. Primero, es una línea en el piso con los números marcados y marcas mayores, o quizá de otro color, para los múltiplos de diez. El 'corredor numérico' también es el alumno que camina o corre por la línea diciendo los números que va pasando en voz alta, al llegar a 'diez' para brevemente y luego sigue. En ese momento otro alumno empieza de cero y ambos cuentan en voz alta. Todos pueden escuchar la diferencia entre los dos contadores y también las similitudes. Sin explicar el sistema decimal demasiado, la naturaleza rítmica del sistema se aprende a niveles más profundos de lo que cualquier teoria podria enseñar.

Las cosas se vuelven aún más claras si empiezan dos niños simultáneamente a contar, uno desde el cero y otro desde el veinte. O

que empiecen cuatro niños al mismo tiempo, del cero, veinte, treinta y cuarenta. Así, los niños experimentarán la estructura del sistema, sobre todo si los cuatro alumnos cuentan al unísono. Finalmente, se puede sumar el quinto alumno que empezará en el diez, mostrando así la naturaleza particular del intervalo entre diez y veinte.

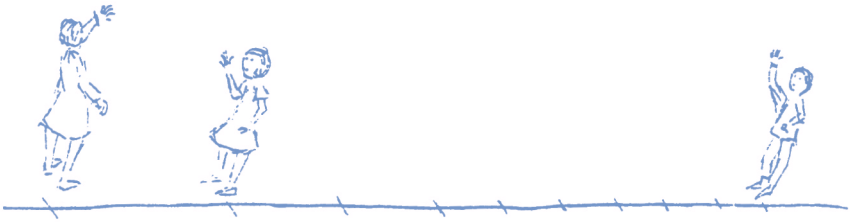
Más adelante en el año escolar podemos poner a los alumnos en el 10 - 20 - 30 - 40, etc. y pedirle a un corredor numérico que empiece desde el comienzo: 1 - 2 - 3 - 4, etc. Cuando llegue al 10 le da la mano al compañero que espera, este le dice 'diez' y el corredor de responde 'cero'. Siguen juntos al 11, el compañero dice 'diez' y el corredor responde 'y uno'. Al llegar a 12 se oye 'diez y dos', luego 'diez y tres', 'diez y cuatro' etc. A los niños les suena un poco raro, pero saben que es correcto. Al llegar al 20 el compañero que ahí espera dice 'veinte' y el corredor 'y cero', esa nueva pareja continua. El compañero del 10 se regresa a su lugar a ver si llega algún corredor nuevo. Al ver que no, observa qué pasa en el 20. El corredor ha dado un paso al frente y se oye 'y uno'. Ahora no sólo no suena raro, sino que suena correcto, es cómo decimos los números, así podemos seguir hasta llegar al 100.

Regresando al intervalo entre 10 y 20, ya sabemos que 11 es 10 y 1, 12 es 10 y 2, etc. Al llegar a 16 es muy claro: 'diez y seis'. ¡Después de esto, qué fácil!

El entendimiento viene después, como debe de ser. Primero la actividad, después la comprensión. Primero saber cómo, después saber porqué.

Más adelante podemos aclararle a los alumnos el sistema posicional, será de gran ayuda recordar juntos cómo jugaron el juego del corredor numérico. Se acordaran que a partir del 10 el corredor nunca estaba solo, esto corresponde a partir del diez escribimos el número

con más de un dígito. Después podemos, juntos, considerar qué hubiera pasado si nos hubiéramos seguido más allá del 100. Seguramente es mejor modificar el juego dejando que el alumno que está en el 10 continúe hasta el 100, en lugar de tener alumnos en los intervalos del 10. Al llegar al 100 se encuentra con un tercer alumno y este continua. Si imaginamos cómo se vería el principio del ejercicio, sería así:



Tres niños se alistan a practicar el sistema decimal.

Usando este sencillo juego es posible ilustrar muchos fenómenos numéricos. Aquí hemos tratado de mostrar que el corredor numérico, a partir de cierto punto, nunca se quedó solo. Gracias a su posición estaba 'amarrado' a otra persona. Esta conexión es lo que debemos subrayar. Lo podemos hacer, por ejemplo, pidiendo a los niños que entrelacen los brazos, o usando un listón rojo para 'amarrarlos'. Sólo se pueden separar al pasar de regreso por el 10.*

Otro juego con el mismo objetivo es el siguiente:

En el suelo dibujamos un pasillo numérico hasta 100 y lo dividimos de 10 en 10. El primer alumno corre con pasitos pequeños al tiempo que cuenta hasta 10. Al llegar al 10 se encuentra con otro corredor que ha

---

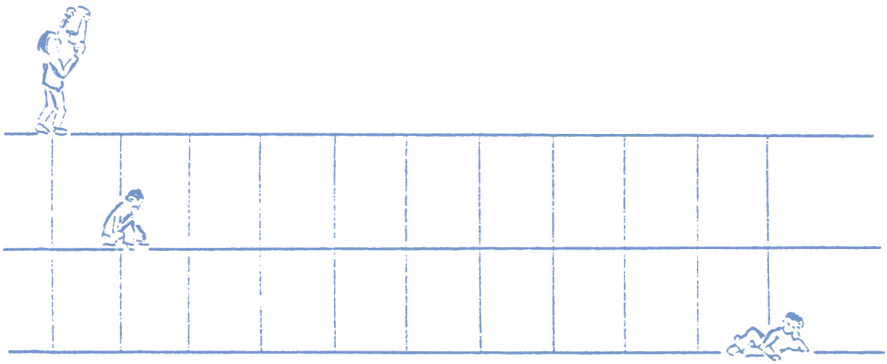
* En Danés, Alemán u otros idiomas donde los números veintes, treintas, cuarentas, etc. se dicen al revés, por ejemplo, uno y veinte, dos y veinte, tres y veinte, el ejercicio debe modificarse para que el corredor numérico hable primero. "Uno" seguido por el compañero de los veinte que dice "y veinte".

llegado del 0 al 10 en un solo arco diciendo ‘uuuuuno’. Su ‘no’ coincide con el ‘diez’ del primer corredor, por lo que representa las decenas. Mientras el corredor de unidades se apura para llegar al 20 dando pasitos, el corredor de decenas empieza su segundo arco diciendo lentamente ‘doooooooos’, y así sigue. El tercer corredor hace una curva más grande aún diciendo de manera flemática ‘uuuuuuuuuuunnnnnnnnno’ y se encuentra con sus dos compañeros en el 100. Él ha caminado una de sus unidades, el segundo corredor ha viajado diez de sus unidades y el primero ha dado cien pasitos.



Los dedos corresponden muy bien al sistema decimal – o al revés.

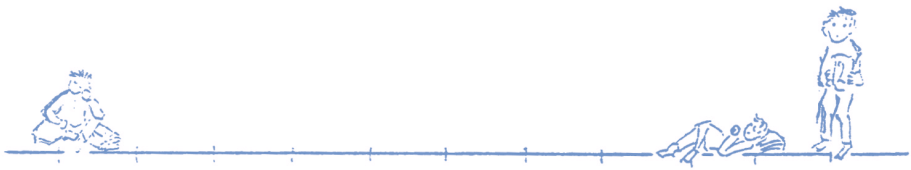
Ahora hay que transferir este patrón al número escrito: unidades, decenas, etc. en el lugar correcto. Una manera de lograrlo es dibujar tres líneas numéricas en el suelo, paralelas y colocar niños ‘durmientes’ en el 1 de la primera línea, el 10 de la segunda y el 100 de la tercera. Si ahora despertamos al alumno del 1 y camina su línea hasta llegar al 10 donde despierta al compañero, juntos pueden caminar en paralelo hasta el compañero del 100 y despertarlo. La distancia debe mantenerse proporcionalmente correcta. Al caminar, cada niño lleva un cuadernillo con grandes números escritos en cada hoja, que van pasando al caminar,



El sistema posicional con tres líneas numérica

esto hace que todo el grupo vea los números mientras se caminan. Quién va a la derecha y a la izquierda es claro, ya que todos vieron a Janet con sus sus unidades parada a la derecha y Juan con sus decenas a la izquierda. Los niños también ven qué ocupada esta Janet volteando las hojas de su cuaderno, mientras que Juan tiene mucho tiempo para hacerlo. Observar a Janet y a Juan, y quién estaba más ocupado, es fácil de recordar. Si los movimientos hubiesen existido sólo en el pensamiento, únicamente lo recordarían al día siguiente unos pocos niños.

Otro método para ilustrar el sistema posicional es con una sola línea numérica donde los niños caminan de lado, de derecha a izquierda, mirando al resto del grupo y con sus cuadernillos frente a ellos. Caminan hasta llegar al compañero, lo 'despiertan' y caminan empujándolo con su hombro derecho. Así se mantienen las posiciones.



El sistema posicional con una línea numérica

Ahora pidamos a los niños que formen un círculo mirando hacia el centro y cuenten, cada uno diciendo su número. Los niños ya saben cuantos compañeros hay en el grupo, si todos están presentes, sabrán cuando hayan llegado al fin. Si les preguntamos individualmente cuál era su número pocos lo recordarán. Se han prestado, desinteresadamente, a un recital de grupo, sin pensar en su posición individual. Si repetimos la secuencia, todos ahora, recordarán su número, sin embargo, el ritmo del conteo se habrá perdido ya que cada niño está atento a su propio número.

Ahora podemos preguntarles qué número son apuntando hacia ellos, por ejemplo, de manera que ciertas relaciones numéricas se hagan visibles. Por ejemplo podemos oír los números 5-7-9-11-13, etc. y habiendo contado una vez, los alumnos pueden continuar la serie como si hubiesen más niños en el grupo. Si empezamos con el 2-4-6, escucharan la tabla del 2 aunque aún no la hayamos presentado formalmente. Podemos escuchar el principio de la serie 1-3-2-4-3-5 al apuntar al alumno adecuado o explicando que contaremos dos hacia adelante y uno hacia atrás. En seguida la serie se continúa sin necesidad de apuntar y los alumnos se sienten muy bien orientados en el mundo de los números, tanto con sus ojos como con sus oídos.

Otro ejercicio consiste en hacer un círculo con 10 alumnos mientras el resto del grupo observa. Esta vez contamos hasta 30. Les advertimos que tendrán que recordar varios números ya que contaremos varias veces en el círculo. Con la práctica sale todo mejor y pronto todos podrán decir sus números en cuanto descubran el truco.

Por ejemplo, ¿Qué números tiene Pedro? Pedro tiene buena memoria, sus números eran el 3, el 13 y finalmente el 23.

¿Qué números tiene Diana? El 9, el 19 y el 29.

¿Y Juan? Bueno, Juan tiene mala memoria y además le cuesta poner atención, pero es muy listo y pronto se da cuenta que sus números son el 7, el 17 y el 27.

Al repetir el ejercicio es obvio que los números de Juan son el 7, el 17 y el 27. De repente está muy atento, aunque tome mucho tiempo contar tres rondas en el círculo ¡Nunca se ha concentrado tanto!

Al día siguiente repetimos el ejercicio con los mismos alumnos y todos saben lo que va a pasar. Sin embargo, el maestro se une al círculo porque también quiere participar. Se para entre el 7 y el 8 y Juan sabe que algo va a cambiar. Antes de contar tres veces, sabe a ciencia cierta lo que va a ocurrir e interrumpe el ritmo del conteo cuando le toca decir su número. Es 18 ahora y le susurra al compañero que la próxima vez le tocará el 29.

Después de escuchar los números (1-12-23, 5-16-27, etc.) el maestro se pone entre el 6 y el 7 y el juego comienza de nuevo. Nadie se ha dado cuenta que se movió con excepción de Juan, y rápidamente se termina el juego ¡Juan está muy emocionado!

Los juegos de conteo y sus consecuencias deberían jugar un papel importante durante los primeros años de la Primaria. Aún cuando los alumnos están seguros de sí mismos y del sistema numérico. Los mejores juegos son los que empiezan en círculo, ya sea de pie o en movimiento. Poseen un carácter atemporal, ya que la línea no tiene comienzo ni final, y el círculo se puede transformar de muchas maneras. Ambos aspectos son importantes en las matemáticas.

Hay muchas posibilidades si trabajamos en un salón grande. Formamos una fila de 10 alumnos uno detrás de otro, cuentan hasta diez, cada niño dice un número. Cuando el último dice ‘diez’ corre al frente de

la fila y dice ‘uno’ y todos vuelven a contar. El juego continúa hasta que el primero de la fila original llega a ser el último y dice ‘diez’. Generalmente no hay complicaciones. Los niños experimentan que lo que la fila hizo muchas veces, lo hizo cada niño de manera más lenta (más adelante les podemos decir que fue diez veces más lenta). Sin embargo no todos vivieron lo mismo, ya que cada niño contó en diferente orden.

El primero dijo lentamente:	1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
el segundo:	2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 1
el tercero:	3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 1 - 2
el cuarto:	4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 1 - 2 - 3, etc.
y el décimo:	10 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9

En algún punto los niños pueden escribir estas series numéricas de principio a fin. Son muy regulares y a los niños les encanta buscar las reglas que rigen los patrones y hacer nuevos descubrimientos.

Al día siguiente, podemos dejar que todos juntos digan en voz alta la serie numérica del séptimo alumno:

7 - 8 - 9 - 10 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6

Al llegar a ‘seis’ cerrarán bien sus boquitas, ya que saben de más que el número 7 no debe repetirse. En el silencio que se crea el maestro aprovecha para pedirle al grupo que se imagine que hay 12 alumnos en la fila. ¿Qué números tendrían entonces que decir?

Los niños contestan juntos:

4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12 - 1 - 2 - 3

Hay otro juego que podemos jugar si nos parece que los niños se cansan. Al preguntar si están muy cansados posiblemente tres de ellos digan que no, el maestro les llama al frente. Le pregunta al grupo hasta cuanto se puede contar con tres alumnos, seguramente contesten 'tres'. Sin embargo, si el primer niño dice 'uno' puede correr al final de la fila (sobre todo si cuentan lentamente) y estar listo para decir 'cuatro' cuando le toque. El segundo niño hará lo mismo y se alistará para decir 'cinco', y así seguirá el juego.

Todos ponen atención al comenzar el juego. Los cansados han olvidado su cansancio y, emocionados, siguen el conteo para ver hasta dónde se puede llegar. Para evitar confundirse es mejor aplaudir al decir cada número, y fomentar un ritmo lento, firme y regular, para que dé tiempo a decir los números más largos al pasar del 20. Eventualmente todos nos cansamos y se acaba el juego.

Otro día, si estamos cansados de movernos mucho, podemos tener una conversación numérica en el salón, entre el maestro y los alumnos.

El maestro (M) dice un número o una serie de números, y cada alumno (A) continúa la serie diciendo la misma cantidad de números.

M : 1 - 2 - 3
A : 4 - 5 - 6
M : 7 - 8
A : 9 - 10
M : 11 - 12 - 13 - 14
A : 15 - 16 - 17 - 18
M : 19
A : 20, etc.

Se puede 'conversar' usando diferentes entonaciones, velocidades y volumen. Así se convierte en una conversación dramática que los niños disfrutan. Aquí se vale ser flojo, preocupón, enojón, impaciente o impasible. También se vale 'regañar' al maestro ¡Y contestarle con entonación vigorosa!

También se puede decir el mismo número de números cada vez. Esto facilita las cosas y al mismo tiempo estamos trabajando las tablas de multiplicar sin saberlo.

M : 1 - 2 - 3
A : 4 - 5 - 6
M : 7 - 8 - 9
A : 10 - 11 - 12, etc.

Sin embargo, aún no hemos tocado el tema de las tablas. Cuando lo hagamos no debe ser en el salón de clase sino en el salón de movimiento o en el gimnasio, o en cualquier salón grande y vacío.

Capítulo 5

LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

A menudo se escucha que las tablas de multiplicar son abstractas y secas, sin embargo pueden brindar mucho placer y actividad.

Saberse las tablas de multiplicar es ciertamente una necesidad para ciertos aspectos de la vida adulta, y al olvidarnos hasta cierto punto de las necesidades reales de la niñez, e intentar proyectar nuestras necesidades sobre ella, enseñamos las tablas como si estuviéramos haciendo pan ¡Sin levadura! El pan entonces, se vuelve un pedazo pequeño y seco, y hace falta mucha saliva para tragarlo.

Empecemos entonces con movimiento y ritmo, con la música de las matemáticas. Los niños se ponen de pie en un círculo y vamos en el sentido de las manecillas del reloj. Cada tercer paso saltan con los pies juntos. Izquierda-derecha-salto, izquierda-derecha-salto. Gracias a la práctica anterior pronto establecen un buen ritmo de tres/cuatro, y cuando el ritmo está sonando firmemente quizá empecemos a cantar:

Naranja dulce, limón partido,
dame un abrazo, que yo te pido,
si fuera falso mi juramento,
en un momento se olvidará.

o cualquier otra canción conocida en ritmo de 3 por 4. Aquí el problema para muchos maestros, es empezar de manera que el salto caiga en la sílaba correcta, en este caso el “ce” de “dulce”.

Ahora podemos intentar algo más difícil pero más a gusto para el cuerpo. Los niños ahora pisan izquierda-derecha-salto, derecha-izquierda-salto, para alternar con las piernas. Cada ritmos tiene su propia cualidad. Como niños experimentan esa cualidad antes de hacerse conscientes de los números. Esto lo notan sobre todo al cambiar a un ritmo de cuatro/cuatro; este es un mundo muy diferente que todo compositor conoce. Los dos ritmos son expresiones musicales totalmente diferentes.

Ahora hacemos izquierda-derecha-izquierda-salto, izquierda-derecha-izquierda-salto, etc. Podemos tratar de alternar la izquierda y la derecha, pero no fluye tan fácil o automáticamente como el ritmo de tres/cuatro – de hecho algo se siente raro.

El grupo necesita practicar mucho con estos ritmos antes de empezar con las tablas en sí. Primero deben experimentar la ‘música’, la diferencia de los ritmos. Después, de estos ritmos, los números surgen naturalmente. Esto pasa cuando cantamos los números en lugar de la letra de la canción, por ejemplo:

1-2-3 - 4-5-6 - 7-8-9, etc.

con un salto en 3 - 6 - 9, etc.

Con la ayuda del maestro, esto esto se convierte en:

“Ya” 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, etc.

Este pequeño “ya” es muy importante y regresaremos a él más adelante.

Si seguimos hasta 30 los números se vuelven largos y más difíciles de decir, entonces decidimos decir sólo os que saltamos, pensando en los otros:

(1) (2) 3 (4) (5) 6 (7) (8) 9, etc.

Los números hablados son 3 - 6 - 9 - 12 - 15, etc.

Nuestros pies suenan en el piso en todo momento, aunque nuestras bocas no hablen siempre. Nuestros pies conectan los números y nos ayudan a entender de qué se tratan las tablas.

Se dice de la música que lo más importante no es la nota en sí, sino el esfuerzo que nuestra alma hace para llegar de una nota a otra. Las notas son como los marcadores en la carretera, pero es el espacio entre ellos el que avanzamos. De hecho, es lo inaudible, lleno de nuestra actividad, lo que provee el verdadero contenido a lo que hacemos.

Es lo mismo con las tablas. No son los números lo que experimentamos, es el espacio entre ellos. Esto es lo que le da a cada tabla su carácter particular, y nuestros pies nos ayudan a entender esto. Si únicamente le enseñamos los números 3 - 6 - 9, etc. sería lo mismo que enseñarles los intervalos de distancia entre Cancún y Monterrey, es decir ¡No sería una gran lección de geografía! Nuestros pensamientos pueden saltar los espacios pero nuestros pies no. De hecho, nuestros pies son la medida de los intervalos, es aquí donde viven los niños.

El reto es llevar a los niños a experimentar estos intervalos. Esta es la manera correcta de aprender, más adelante, donde yacen las fronteras, es decir, los números en sí.

De nuevo regresamos al ritmo cuatro/cuatro, esta vez decimos los números y saltamos cada cuarto número:

1 - 2 - 3 - **4** - 5 - 6 - 7 - **8** - 9 - 10 - 11 - **12**, etc.

Más adelante sólo diremos 4 - 8 - 12, etc. en voz alta aunque sigamos caminando para dar vida a los intervalos. Pronto se hará aparente que los intervalos entre las palabras habladas son más largos y requieren más concentración para mantener regular el ritmo. Sin embargo, sigue siendo bastante fácil y sentimos que nuestras piernas lo hacen casi solas.

Al pasar del 4 al 5 nos topamos con dificultades. Experimentamos caminar y hablar:

1 - 2 - 3 - 4 - **5** - 6 - 7 - 8 - 9 - **10**, etc.

Al hacer esto como adultos, intentemos olvidar la tabla del 5. Como adultos sabemos que toca saltar en 5 - 10 - 15 - 20. Pero los niños no conocen esta secuencia, y así aprenden un ritmo, este no es nada fácil. Vale la pena recordar que es muy poco el tiempo que el niño tiene en el transcurso de su vida, para experimentar el ritmo como ritmo puro, ya que la tabla de multiplicar del 5 es tan fácil de aprender.

La tabla del 6 es más sencilla ya que se puede repartir en 3 más 3, pero esto no se lo vamos a explicar a los niños. Ellos simplemente experimentan que es más sencillo o que quizá, se estén volviendo más capaces. El ritmo de 6 también se puede repartir entre dos, tal como lo hacemos con la estrella de seis puntas compuesta por dos triángulos separados que no podemos dibujar de un solo trazo. Aquí la cooperación entre dos y tres se hace aparente. Un ritmo tripartita es más fácil de aprender. Podemos llevar dos, uno tras otro, así como vemos dos triángulos combinarse. Por primera vez los niños experimentan la cooperación entre dos números, y por un breve instante logran vislumbrar un mundo totalmente nuevo.

Esto nos recuerda que nos saltamos la tabla del 2, esa es fácil de aprender en el círculo:

izquierda-salto-izquierda-salto, etc.

o mejor aún: izquierda-salto-derecha-salto-izquierda-salto, etc.

y después: 1 - **2** - 3 - **4** - 5 - **6**… etc.

terminando con: (1) 2 (3) 4 (5) 6, etc.

Ahora rompemos el círculo por primera vez. Algunos niños se van a un extremo del salón y se dan la mano. Van caminando hacia el otro extremo del salón diciendo la tabla del 2:

(1) - 2 - (3) - 4 - (5) - 6, etc.

Antes de llegar a 20 seguramente han alcanzado la pared, pero como queremos aprender hasta 20 hay que regresarse y volver a empezar, dando pasos más pequeños. Eventualmente aprendemos el tamaño idóneo de paso que hay que dar para llegar a la mitad del salón en el 10 y al otro lado en el 20.

Hacemos lo mismo con la tabla del tres. Es más difícil – quizá sea buena idea salir a donde ¡No nos vea nadie!

Ahora llegamos a la tabla del 4, luego a la del 5 y finalmente a la del 6. Esta última se nos dificulta caminarla del mismo modo. No obstante, se puede contar juntos en silencio si movemos las manos en sincronía, y es divertido ver como saltan los niños al mismo tiempo. Notemos que mientras cuentan en silencio, respiran más profundo y entre ellos, los niños cooperan intensamente y se concentran en la actividad.

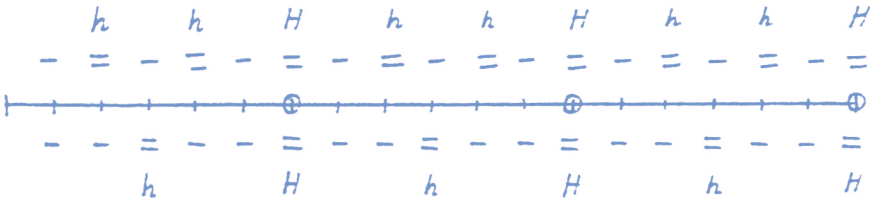
Ahora, regresemos a la tabla del 2 y del 3. Dibujamos una larga línea en el suelo y la marcamos con rayas del tamaño de un pequeño paso. Quizá la línea salga sobrando, pero la dibujamos por si acaso ya que vamos a hacer algo ¡Realmente difícil! Es algo que no usaremos en clase hasta más tarde, pero ya que el grupo es tan listo, lo vamos a intentar ahora.

Dos niños se paran al principio de la línea, a cada lado. Uno de ellos camina la tabla del 2 en voz alta y el otro camina la del 3, sin darse la mano. Pronto lo logran y se ve muy bien, así que lo intentan hacer tomándose de la mano. ¡No es tán fácil! Por suerte son buenos amigos y se ayudan mutuamente, tratando de no hacerse pasar ninguna vergüenza. Su amistad perdura con la ayuda de sus encuentros en los números 6 - 12 - 18 - 24, etc. cuando saltan juntos, mientras que en los números

2 - 3 - 4
8 - 9 - 10
14 - 15 - 16, etc.

¡Casi se arrancan los brazos! Con mucha concentración logran mantener el ritmo. La tabla del 2 es la más difícil – es más, ¡Es el doble de difícil!

En la siguiente ilustración un salto se muestra con dos rayas pequeñas y una raya significa un paso normal. Podemos ver la alternancia rítmica de la armonía y la discordia entre los dos niños. Si escuchamos atentamente, cuando fluye bien, se escucha una nueva melodía compuesta por dos tonadas individuales. Dos ritmos contradictorios han creado una unidad superior.

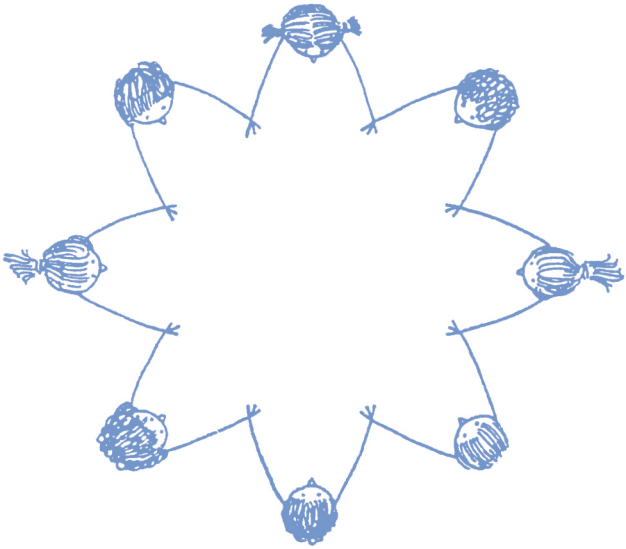


Puedo saltar, puedo contar, mírame saltar, mírame contar.

Tras esta diversión regresamos al círculo, nos damos las manos y formamos una linda rueda. Hacemos el ejercicio con el cual empezamos, mecer los brazos hacia adelante y hacia atrás mientras contamos. Ahora sólo emerge la tabla del 2, sobre todo si contamos cuando los brazos están adelante. Si lograsemos verlo desde arriba, y si los niños no están parados muy juntos, se vería hermoso.

Ahora preguntamos ¿Podemos mecer un brazo hacia adelante y el otro hacia atrás, así como cuando caminamos? Veamos, nos soltamos de la mano y mecemos los brazos como si caminaramos. Todos los mecemos igual – los brazos derechos todos hacia adelante, los izquierdos hacia atŕas, luego al revés. Pronto estamos caminando con los brazos, sin movernos del lugar. Es obvio que no podemos *darnos* las manos, sólo podemos *chocarlas* rápidamente. Esto es claro para todos. Por lo tanto, para que funcione, mi vecino debe de hacer lo contrario a mí.

Al llegar este momento habrá varios alumnos que ya estén pensando en números pares e impares. Por ahora escogemos una estrategia práctica en vez de teórica y escogemos a cinco alumnos, les pedimos que formen un círculo. Uno comienza a mecer alternadamente sus brazos, sus dos vecinos hacen lo mismo pero al revés, pero cuando los siguientes vecinos lo intentan, no funciona. No se puede hacer el ejercicio con cinco alumnos.

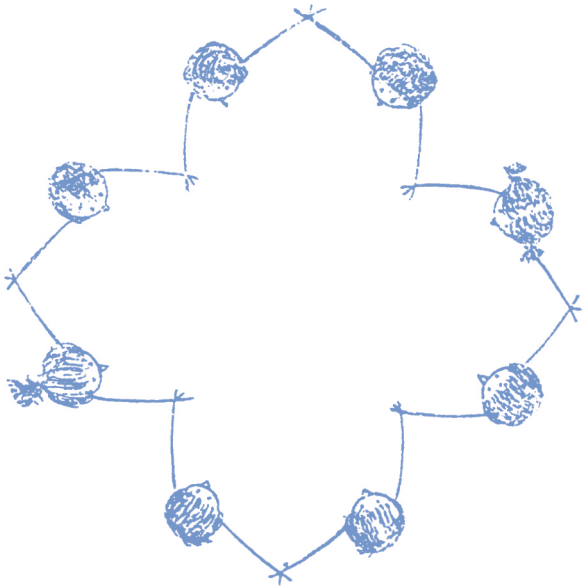


El ejercicio visto desde arriba

Si lo intentamos con seis niños, funciona, con siete surge el mismo problema, así que avanzamos rápidamente a ocho. De repente nos damos cuenta que podemos usar los números de la tabla del 2. Estos son los números que llamamos ‘pares’ y todos piensan que es un buen nombre. Los otros números se llaman ‘impares’ y este nombre ¡También funciona!

Lo mejor es comprobarlo, escogemos los primeros números pares y mecemos los brazos alternadamente al contar. Funciona tanto si nos tomamos de las manos como si no. Pruébalo y estarás de acuerdo que no solo se ve lindo, sino que es divertido hacerlo.

Intenta imaginar el ejercicio visto desde arriba, con los niños en cámara lenta. Como adultos podemos lograr esto, sin embargo los niños lo sienten más en las extremidades que en la mente.



Los brazos se mueven como si camináramos.

Más adelante le pedimos al grupo que repita el ejercicio con una cantidad impar de niños. Rápidamente verán que si es posible con una pequeña modificación. Un alumno debe mecer ambos brazos en la misma dirección y ser el eslabón entre sus compañeros. Si colocamos otro 'eslabón' en otra parte del círculo, el juego se modifica. De hecho, al ser una cantidad par de niños ya no es necesario el 'eslabón'.

En el siguiente ejercicio nos colocamos en círculo una vez más. Uno de los alumnos da un paso con el pie izquierdo y otro con el derecho mientras dice "1 - 2" . El siguiente dice "3 - 4" y hace los mismos pasos. Esto sigue en el círculo hasta que vemos cuantos pies han venido hoy a clases. Al repetir el ejercicio pisamos más fuerte con el segundo pie y surge la tabla del 2. El mismo método se puede usar con la tabla del 4, sólo que esta vez cada segundo alumno dice el número al dar sus pasos al

frente. Esto es más complicado, y algunos alumnos darán su primer paso al frente más fuertemente aunque el número que están contando no sea parte de la tabla del 4.

Pero la dificultad real surge si tratamos de hacer lo mismo con la tabla del 3. Pasará algún tiempo antes que los niños se percaten que el problema surge cuando un ser bípedo intenta marcar un ritmo tripartita. Algunos pisarán fuerte, otros no, otros lo harán con el pie derecho y otros con el pie izquierdo. El pie del vecino querrá ayudar, así como el pie del conductor de coches quiere usar el freno aún cuando está de pasajero.

Este ejercicio es muy divertido. Si hacemos la tabla del 3 con sólo tres personas es bastante aburrido, con dos o cuatro alumnos es más interesante.

Todos estos ejercicios se pueden modificar y hacer con los niños sentados en sus pupitres. La tabla del 3, por ejemplo, se hace aplaudiendo en el pulso fuerte y palmeando suavemente le pupitre en el pulso débil. Hasta la tabla del 6 el ritmo es fuerte, sin necesidad de saber las tablas de antemano. Más allá de 6 necesitamos otros métodos.

Básicamente, es el sonido el que ayuda a imprimir las tablas de multiplicar, más que aprenderse una lista de números de memoria. Es muy importante aprenderse ciertas cosas de memoria, y también es igual de importante cómo se aprenden.

Importante asimismo, es que este modo de aprender las tablas de multiplicar se vea reflejado en los cuadernos de los niños, es decir visualmente. Más adelante (en el capítulo 7) veremos esto además de hablar de la mejor manera de acercarse a las tablas de multiplicación más altas.

Hasta ahora no hemos dicho dónde, en el currículum, se pueden usar estos ejercicios, o el orden en el cual se pueden hacer. Todo maestro,

por experiencia propia, sabe cuándo ha llegado el momento 'correcto' para poner en práctica un ejercicio. Mucho depende de el orden que siga el maestro y el los libros que use. Yo fui maestro durante muchos años en una escuela Waldorf o escuela Steiner, siguiendo la filosofía escolar y la mía propia, nunca utilicé un libro impreso de aritmética. Lo que hice fue basar mis métodos en las necesidades del grupo en cada etapa de su desarrollo. Me parecía importante que el contenido mes a mes, no lo determinase el autor de un libro escrito hace algunos años (por muy bueno que fuera el libro), un autor que no conocía al grupo de niños ni sus necesidades día a día.

Tampoco aquí es propicio proponer un horario u orden específico para hacer los ejercicios. Debe ser el maestro, el que está atento al pulso del grupo, quien decida cuándo y cómo. Al considerar esto, se vuelve obvio que cualquier ejercicio debe poder modificarse libremente para cubrir las necesidades de cada grupo individual y de cada situación particular.

Por lo tanto, por favor tomen los ejercicios descritos y los que se describen a continuación como mera sugerencia y recomendación, que cada maestro puede usar de manera diferente para activar un grupo. Recuerda que han sido creados, antes que nada, para los niños. Estos chicos vienen a la escuela con la esperanza de ser recibidos por un maestro, no por un libro de texto. Esto es especialmente importante si se trata de niños más pequeños, y si estamos hablando de la aritmética.

La aritmética es una materia donde fácilmente podemos tropezarnos y elaborar teorías borrosas que satisfacen el intelecto adulto. Sin embargo, la aritmética es la materia que, gracias a su propia naturaleza, alienta la actividad física tan necesaria y benéfica para el desarrollo de la voluntad del niño.

Capítulo 6

MÁS TABLAS: LAS RELACIONES ENTRE LOS NÚMEROS

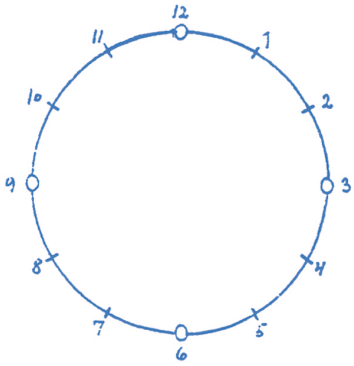
Anteriormente vimos la relación entre los números 2 y 3. Ahora ahondaremos en el tema, de gran importancia en la aritmética, y lo relacionaremos a las necesidades docentes de los primeros grados.

Al llegar al punto donde el grupo conoce las primeras tablas podemos salir otra vez al gimnasio. 12 alumnos forman un círculo y sacan la mano derecha del círculo. Un corredor numérico camina alrededor del círculo y palmea las manos extendidas al ritmo de la tabla del 3. Cada vez que dice un múltiplo de 3 pausa, y el niño cuya palma batió se agacha. El resto del grupo forma un coro que canta y palmea la tabla del 3. Normalmente usaríamos un ritmo de 3/4 para la tabla del 3, pero en este caso es mejor usar un ritmo de 4/4, que le proporciona dos tiempos al niño que tiene que agacharse o acuclillarse.



La tabla del 3 al ritmo de 4/4

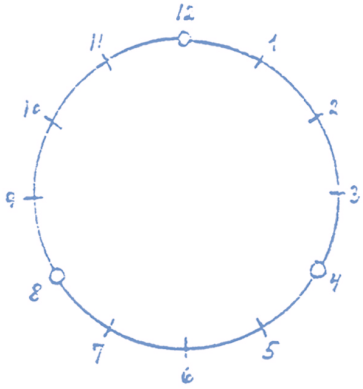
El corredor numérico continúa y pronto hay cuatro niños agachados. El grupo concuerda que la figura que se ha creado es muy linda.



Sólo 4 alumnos estarán sentados

Conforme el corredor numérico continúa, vuelve a tocar a los niños agachados y estos se ponen de pie – son los mismos alumnos los que están en movimiento constante. Esto es algo aburrido para los demás así que intentamos con otra tabla.

La tabla del 4 se canta o declama al ritmo de 5/4 y pronto son tres los alumnos agachados. De nuevo la figura es fácil de reconocer gracias a los ejercicios ya hechos.



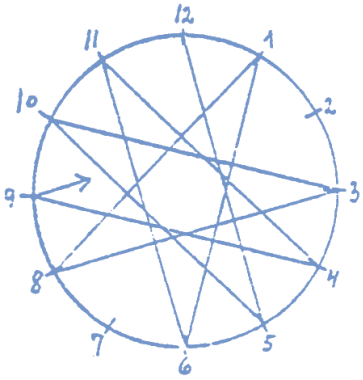
Cuando el corredor numérico pasa al alumno agachado, este se para nuevamente. Son diferentes alumnos los que se mueven pero también se vuelve muy fácil.

Ahora le toca a la tabla del 5, esta vez veremos algo sorprendente. Inténtalo y quedará claro el porqué de la emoción. Ahora nos son los mismos alumnos los que se agachan y se paran. Al principio se agachan el 5 y el 10, luego le siguen:

3 - 8 - 1 - 6 - 11 - 4 - 9

y aún así ¡No se han parado los agachados! Esto parece extraño, pero sería más extraño aún si el corredor numérico si tocara a los tres alumnos que siguen de pie, ya que hay tantos más agachados.

Pronto, todos participarán. El corredor numérico sigue su camino y la tensión crece. Llega al 2, luego al 7, y finalmente al solitario 12 que ha visto innumerables veces como el corredor numérico pasa por delante de su nariz.



Esta vez todos juegan.

Todos se incorporan a medida que el juego continúa, el número 12 sabe que tiene tiempo para relajarse.

Al día siguiente probamos otra vez con la tabla del 3 y del 4, pero ahora sacamos a un niño del círculo. El resultado es diferente al de ayer. Estas tablas no funcionan con 11 niños en el círculo, así que el grupo decide que es un número muy especial. Añadimos dos alumnos más y ahora tenemos a 13 en el círculo. De nuevo arribamos a la misma conclusión: el 11 y el 13 pertenecen a un grupo especial de números, le prometemos a los niños que un día les contaremos más acerca de estos números especiales que llamamos números primos.

También estos juegos se pueden jugar de otra manera. Los 12 alumnos se sientan en un círculo y se pasan una pelota rodándola por el suelo. De nuevo aparece el triángulo y el cuadrado y los 12 estarán igual de activos que antes si le pasan la pelota al quinto niño. Una vez que hayan practicado lo suficiente, se pueden añadir más pelotas hasta que la figura de la estrella quede claramente marcada.

El uso de las pelotas en la aritmética merece un capítulo en sí mismo. Una pelota en una clase puede ser o bien una pesadilla, o una gran ayuda para el maestro creativo. La pelota se puede rodar o rebotar, y simultáneamente hace ruido al pegar contra el suelo o la pared, ayudándole así a nuestros oídos a escuchar el ritmo de las tablas.

En algunos juegos se pueden utilizar pelotas de papel chinas. Si tenemos muchas, o el grupo es callado, podemos llenar el aula de sonidos preciosos.

El número 3 y el número 4 están ligados fuertemente al 12, esto se lo podemos demostrar algrupo de una manera más que nos traerá nuevos conocimientos. Este es otro juego.

En el suelo, usando gis y un cordel, dibujamos un círculo y lo dividimos en tres, tal como hemos hecho muchas veces antes. En una de las tres marcas ponemos a dos alumnos, uno dentro del círculo y otro afuera. El maestro dice "uno" y el alumno parado dentro del círculo corre hasta la siguiente marca. Al contar "dos" corre a la siguiente, y al contar "tres" está de vuelta en la primera marca. Aquí lo espera el otro niño con la mano extendida y chocan palmas. Así aprendemos la tabla del 3 de otra manera.

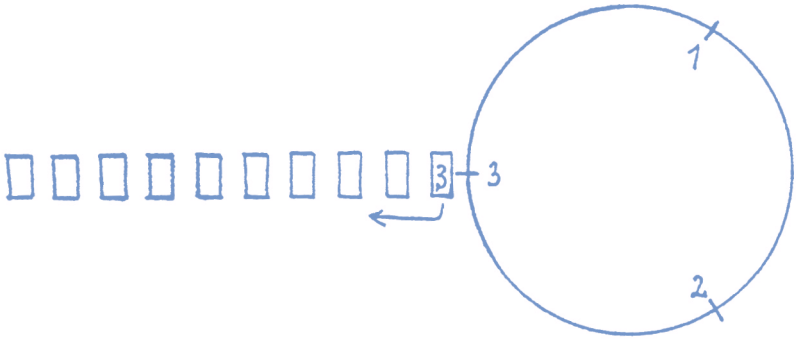


La tabla del 3 practicada con manos y pies

El siguiente niño bate palmas con el corredor al contar el 6, cuando este pasa por segunda vez. Continuamos hasta que el décimo niño ha batido palmas con el corredor al contar "treinta" y regresa a su lugar al final de la fila.

Después le preguntaremos a los alumnos si recuerdan su número. El maestro le pregunta a Pedro, que era el quinto en la fila y él responde "quince".

"Y tú Karen ¿Qué número te tocó? A Karen le tocó el número 24 y era la octava en la fila, así el grupo descubre que 15 = 5 x 3 and that 24 = 8 x 3.



Problema de primera ronda - problema de multiplicación de la segunda ronda

Claro está que el grupo aún no se sabe las tablas de memoria, pero sí sabe cómo funcionan. Antes de aprenderlas de memoria hay muchos más juegos que experimentar.

Estaríamos cometiendo un grave error como maestros si pensamos que un ejercicio practicado sólo una vez es un ejercicio aprendido por los niños. Si simplemente esperamos que algunos alumnos entiendan el ejercicio estaremos perdiendo de vista algo realmente importante, esto es que la repetición, como actividad contínua, es igual de importante para el niño que el respirar. Un niño necesita tanto experiencia como actividad, y es por eso que la repetición es tan importante. El pensamiento se da por satisfecho haciendo un ejercicio una sola vez, pero el niño vive en sus sentimientos y en sus acciones, donde rigen otras reglas. Hasta que logremos entender esto, no hallaremos métodos que funcionen.

Al considerar la enseñanza de la aritmética, debemos pensar en otros términos a la idea de 'aprendido una vez es suficiente', especialmente si tomamos en cuenta los deseos no manifestados del niño. Estos deseos nos harán revalorar tanto la repetición como los órganos sensoriales del niño. Cuando un niño joven es muy activo, nos está meramente ejercitando sus

músculos para desarrollarlos. También está experimentando los diferentes movimientos y la relación al equilibrio con mucha más intensidad de la que los adultos jamás sentirán, intensidad que vive en el niño. Los niños en realidad 'saborean' sus movimientos, los experimentan profundamente, y los repiten una y otra vez hasta que logran irritar a los adultos a su alrededor. Seguramente tenemos memorias escondidas de dichas experiencias de nuestra niñez, y el grado en que podamos traerlas a la consciencia determinará nuestra habilidad para enseñar, sobre todo al usar la repetición como apoyo al desarrollo de los sentidos.

Aquí vale la pena mencionar algunas ideas de Rudolf Steiner acerca de los sentidos. Él describió no sólo los cinco sentidos tradicionales, o los seis modernos, sino doce sentidos en total. En el caso de la aritmética, no son los sentidos superiores relacionados con la consciencia humana que nos permiten entender mejor la materia, son los sentidos inferiores los que importan aquí.

Al examinar los libros modernos de aritmética, vemos que exigen todo nuestro intelecto para ser comprendidos. A menudo escuchamos las frases: "a mi las matemáticas nunca me hicieron click" o "no puedo ni sumar dos más dos". Estas actitudes nacen en lo más profundo de nosotros, tanto así que para lograr entenderlas es necesario regresar a nuestros primeros años de vida donde aprendimos a erguirnos, movernos y mantener el equilibrio; todos experimentamos eso entonces y ahora. Rudolf Steiner habla del 'sentido del movimiento' a través del cual experimentamos el movimiento corporal en detalle. Este sentido y los otros sentidos 'inferiores' juegan un rol crítico durante los primeros años de vida, y ejercen gran influencia sobre nuestra habilidad de entender la aritmética.

Es por eso que debemos adentrarnos más profundamente de lo normal en la introducción de la aritmética. Apelemos a los movimientos de las extremidades y utilicemos la repetición como principio educativo, y no como mal necesario.

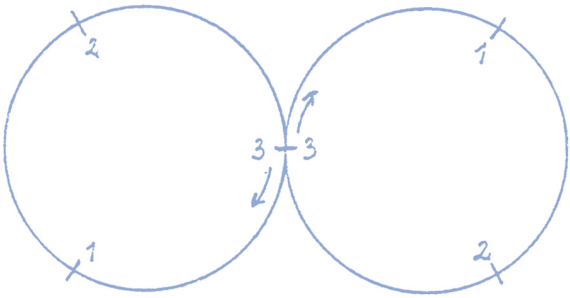
Volvamos a examinar el último juego. Caminamos en un círculo, y nos alegramos de ver aparecer los siguientes números:

3 - 6 - 9 - 12 - 15, etc.

Al jugar dividiendo el círculo en cuartos, obtenemos

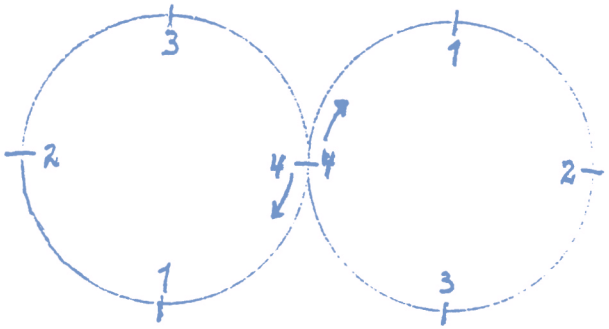
4 - 8 - 12 - 16 - 20, etc.

Ahora dibujemos dos círculos, tal y como muestra la siguiente gráfica, que dos alumnos se paren en el punto donde se tocan los dos círculos, mirando en direcciones opuestas. Se mueven simultáneamente en el sentido de las manecillas del reloj al tiempo que cuenta el maestro.

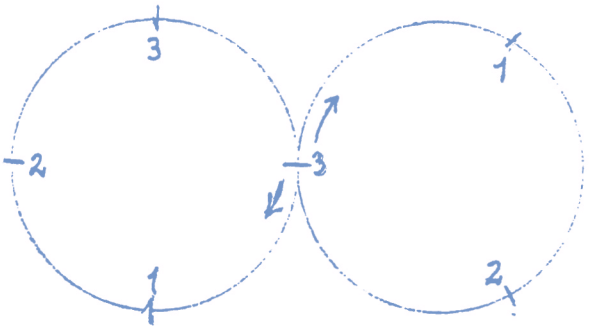


Al llegar al número 3 se encuentran y baten sus palmas en el punto exacto. Esto sigue hasta llegar a 30.

Al probar con la tabla del 4 y funciona igual de bien.



Ahora juntamos las tabla del 3 y del 4, como se muestra a continuación.



A la cuenta de 3 uno de los corredores ya llegó, mientras que al otro todavía le falta. Es obvio que en esa ocasión no se encuentran para batir palmas ya que a la de 4 el segundo corredor está listo para batir palmas pero el primero ya se encuentra dando su segunda vuelta al círculo. A la de 5 no hay nadie. A la de 6 el primer niño está de vuelta pero el segundo está en el lado opuesto de su círculo. A la de 7 no hay nadie, a la de 8 y 9 parece que se encontrarán. Sin embargo pasa el corredor de la tabla del 4 y tras él el corredor de la tabla del 3. Al llegar a 10 parece todo inútil, a la de 11 hay cierta tensión en el aire y finalmente, al contar a 12

celebramos. Si continuamos, la mayoría de los niños se darán cuenta que el proceso se repite, y que los corredores se encontrarán nuevamente – algunos hasta lo dirán – en el 24.

Esto significa que el 3 y el 4 están relacionados entre sí y son familia de los números

12 - 24 - 36, etc.

Tal como sabemos gracias a nuestros juegos de nueces, hay varias maneras de dividir un círculo. Ahora es momento de presentar muchos ejercicios que hagan uso de este conocimiento y así, preparen el camino para los años venideros. Probemos el mismo juego con las tablas del 3 y del 6. El juego va de maravilla, y también el juego de las tablas del 2 y del 6.

Ahora podemos probar con las tablas del 2 y del 3, descubriremos que el corredor de la tabla del 3 tiene que dar dos vueltas y el corredor de la tabla del 2 tres vueltas antes de encontrarse y batir palmas. Es fácil de recordar. Los corredores de las tablas del 3 y del 5 tendrán que dar varias vueltas antes de encontrarse, pero la misma regla aplica: la tabla del 5 da tres vueltas y la tabla del 3 da cinco vueltas.

Ahora queremos saber si esta regla siempre funciona. Probamos con las tablas del 2 y del 4 y descubrimos que el corredor del 2 da siempre dos vueltas antes de batir palmas, mientras que el corredor del 4 siempre las bate tras cada vuelta.

Puede que estas cosas sean obvias para nosotros los adultos, es decir, obvias si las razonamos, sin embargo no lo son para los niños. Para ellos lo que sí es obvio es lo que observan, y ahí yace el valor del ejercicio. Lo que ahora observan, se convierte en la base del pensar futuro, un pensar vivo y activo.

Al decir 'futuro' hablamos del cuarto grado, cuando están a punto de aprender las fracciones o quebrados. Es muy útil poder introducir esta materia difícil diciendo "Se acuerdan que hace dos años, cuando estaban apenas en segundo grado jugamos un juego donde formábamos un círculo y …"..

Ellos recordarán. Recordarán porque estaban físicamente activos una y otra vez, unos corriendo por el círculo, otros batiendo palmas. También recordarán la emoción y el alivio al ver a los corredores encontrándose, y dirán "a, sí, eso es lo que significa…" El mejor tipo de enseñanza es el que brinda la oportunidad al grupo de niños de decir "aaa, si" o "ajá".

En el salón podemos jugar el mismo juego de otra manera. Dos niños se paran frente a frente. Cada niño bate sus palmas tres veces y luego las de su compañero la cuarta vez y así sucesivamente:

1 - 2 - 3 - **4** - 5 - 6 - 7 - **8** - 9 - 10 - 11 - **12**

El mismo método se puede emplear para la tabla del 3:

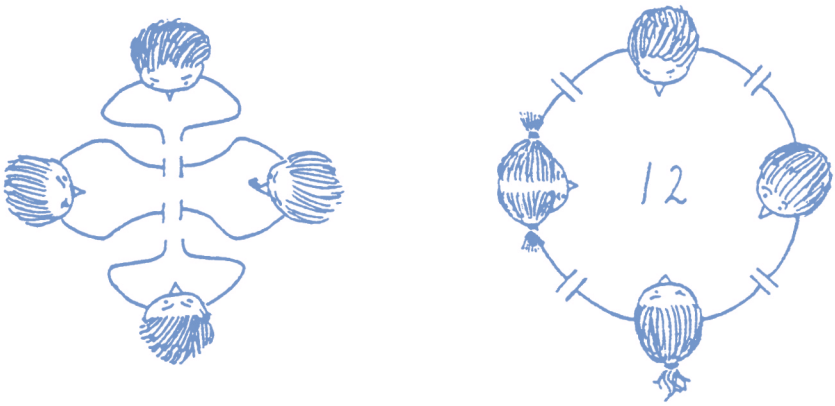
1 - 2 - **3** - 4 - 5 - **6** - 7 - 8 - **9** - 10 - 11 - **12**

Ahora juguemos el juego de manera que uno de los niños usa la tabla del 3 y su compañero la del 4. A veces no hay manos que palmear, así que palmeamos el aire – algo bastante chistoso si los compañeros están lo suficientemente alejados – a veces si baten palmas el uno con el otro.

12 - 24 - 36, etc.

Para jugar este juego hay que estar muy seguro del ritmo propio, ya que es fácil dejarse distraer por el ritmo del compañero.

Cuando por fin todo marcha sobre ruedas, introducimos una variación más difícil. Ahora hay dos pares de niños frente a frente, formando una cruz. Una pareja palmea la tabla del 3 y la otra la del 4. Al contar a 3 se batirán palmas y al contar a 4 también. Es sorprendente lo rápido que dominan el juego, ya que apenas hay tiempo suficiente para quitar las manos y evitar que las manos de la otra pareja les peguen. Sin embargo al llegar a 12 es un caos. Así que decidimos que palmearán a los lados al llegar a 12 - 24 - 36, etc. creando momentáneamente un círculo. Hace falta mucha concentración, pero nos trae un ritmo nuevo y emocionante.



Palmeando las tablas del 3 y del 4. Hace falta mucha concentración

Claro que podemos usar las otras tablas de multiplicar, pero para empezar las tablas del 3 y del 4 son las mejores.

También queremos que el grupo completo esté activo simultáneamente, para esto les pedimos que se formen en dos filas frente a frente. De esta manera las parejas de niños pueden palmear diferentes tablas en unísono.

Aprovechando esta formación, es interesante alternar ritmos de dos y tres tiempos mientras contamos:

1- 2 -3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11- 12 - 13 - 14 - 15, etc.

Aquí surge la tabla del 5 y otra tabla del 5 traslapada, que empieza en el 2. Si pedimos al grupo que escuche con atención los números que marcamos, rápidamente podrán identificar:

2 - 5 - 7 - 10 - 12 - 15, etc.

y aprender así una regla que les será útil más adelante.

Cuando los alumnos lleguen a quinto o sexto grado, no será suficiente ver simplemente que las tablas tienen mucho en común, tendrán que trabajar con mitades, tercios, cuartos y quintos. Ahora estamos construyendo los cimientos que serán la base del desarrollo de esas habilidades.

Ahora dibujamos parte de nuestra línea numérica en el suelo, y al dibujar vamos diciendo que para poder tener tres espacios es necesario hacer cuatro marcas. A seguir colocamos a dos alumnos en cada extremo de la línea, como se muestra a continuación:



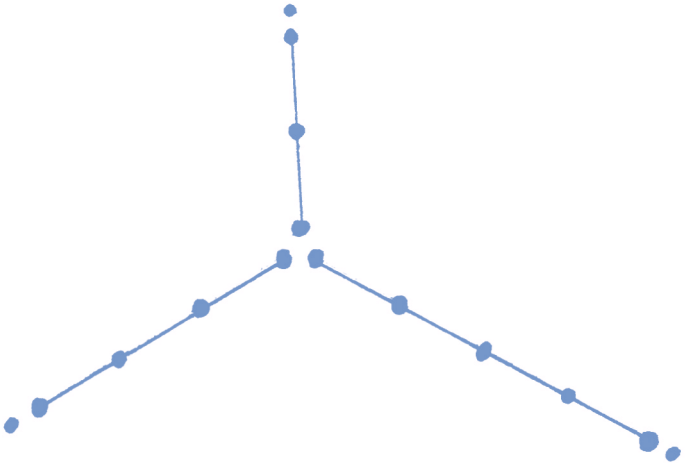
Dos alumnos aprenden la tabla del 3 al mismo tiempo.

Los dos alumnos de 'dentro' marchan la tabla del 3 en la misma dirección, por ejemplo en el sentido del tráfico por la derecha (como se muestra en la ilustración), y baten palmas con el alumno que se encuentra estacionario en el otro extremo. El juego sigue y surgen el 3-6-9 etc. El

maestro cuenta y los niños paran al llegar al fin, el maestro dice el nuevo número y ellos marchan de nuevo. Cuando se ha practicado este ejercicio lo suficiente, cambiamos un poco el método, para que los alumnos hagan un movimiento continuo y regular de una estación a otra sin parar. Así llegarán a la estación al mismo tiempo que escuchan el número, el ejercicio se vuelve más rítmico y más difícil.

Repetimos el juego usando las tablas del 2, del 4 y del 5. Alentamos a los alumnos a que observen en qué punto de la línea numérica se encuentra el tráfico, así su conocimiento de los números pares e impares crece. El maestro les puede preguntar en cuáles números se encuentran. Aquellos alumnos que marchan tablas pares logran contestar fácilmente, los otros – y el resto del grupo – se lo cuestiona bastante. El cuestionar es un excelente precursor del conocimiento, así que todo marcha bien.

Ahora es tiempo de ampliar el juego a lo que se muestra en la siguiente ilustración. Hay tres alumnos estacionarios en los extremos de las líneas, pero no hay ninguno en el centro. Cada línea tiene dos corredores, uno en cada extremo. El juego empieza con cuidado, el maestro cuenta y los alumnos paran el número correspondiente hasta que el maestro con calma dice el siguiente número. Llegará el momento que los niños estén marchando contínuamente, sin parar. Hay que recordar la regla de tráfico y transitar por el 'carril' correcto. Los tres alumnos que de vez en cuando se encuentran en el centro, unen sus manos al pasar. Cuando llegan al extremo de la línea baten palmas con el alumno estacionario.

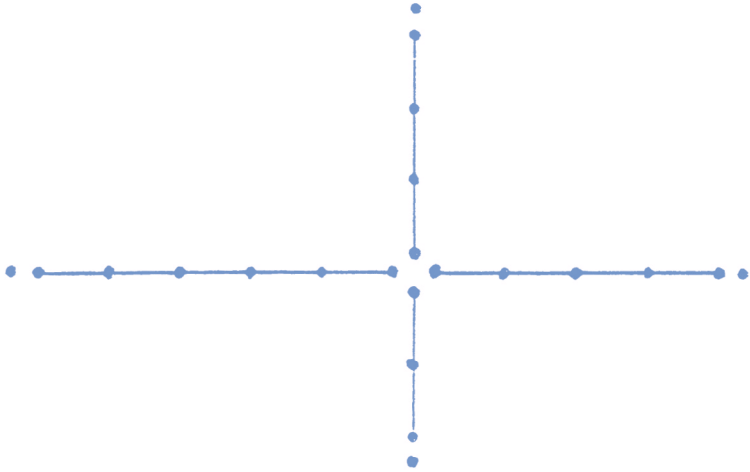


Las tablas del 2, el 3 y el 4 se practican juntas, así nos preparamos para los denominadores comunes.

Ahora vamos a ver lo que pasa en el centro. A la de 1, no hay nadie. A la de 2, el corredor de la tabla del 2 aparece. A la de 3, el corredor de 3 está ahí. A la de 4 está el corredor de la tabla del 4 y del 2. A la de 5, no hay nadie, pero a la de 6 se encuentran los corredores de la tabla del 2 y del 3. A la de 7, de nuevo no hay nadie. Ahora los niños empiezan a preguntarse si alguna vez se encontrarán los tres corredores al mismo tiempo. Seguimos jugando y descubrimos que a la de 12 todos se encuentran de nuevo.

Ahora es momento de invitar a la tabla del 5, junto con la del 2, del 3 y del 4. Los niños se están anticipando intentando adivinar qué pasará en el juego, pero sólo el pensarlo no nos lleva muy lejos, mejor hay que jugar y ver qué pasa.

Este será un proceso largo y complicado, pero no será aburrido ya que habrá suficiente dramatismo. Al llegar a 24 hay mucha excitación, todos ven al corredor de la tabla del 5 que está echando todo a perder

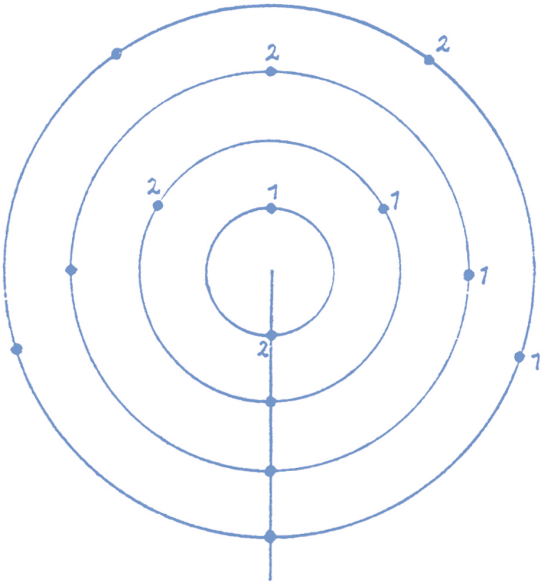


Se añade la tabla del 5, las cosas no se hacen más sencillas

porque está una estación atrasado. Al llegar a 25 los demás ya se han ido. Al llegar a 30 parece que las cosas mejoran, pero el corredor de la tabla del 4 no está. Cuando los corredores llegan al 36, el de la tabla del 5 de nuevo está rezagado. Al llegar al 40, se queda atrás el corredor de la tabla del 3, algo poco usual. Finalmente llegamos al 60 y podemos respirar tranquilos.

Este juego se puede simplificar usando la forma que se muestra en la siguiente ilustración, esto también es de gran utilidad al ver otras materias y otros temas (como por ejemplo las órbitas planetarias).

Los niños conocen bien el círculo a la hora de ensayar las tablas de multiplicar. Ponemos a los niños en formación concéntrica, cada uno en su propio círculo, con todos los puntos de comienzo alineados. A la de 1 se rompe la alineación. Ahora la clase se pregunta cuándo se volverá a alinear todos. El desenvolvimiento es exactamente igual que el anterior, con unas pocas variaciones, y nos brinda más oportunidades para conocer mejor los números.



Cuatro tablas en sus órbitas

Los números primos después del 5 despertarán el interés de los niños, ya que dejan el punto de partida vacío. Si observamos este punto con cuidado, y sin poner demasiada atención a la teoría, descubriremos que hay que observar estos números muy cuidadosamente. Al decir el número primo, el punto de partida está vacío y, visto de cierta manera, también lo están los números en sí.

Consideremos otros aspectos de suma importancia a la hora de trabajar con niños. Es vital escoger a quién colocamos en el círculo. Un niño vivaz y sanguíneo probablemente no se canse de dar vueltas y más vueltas si lo colocamos en el centro. Si se cansa antes de llegar a 60, le podemos alentar a continuar. Esta misma situación sin embargo, no le favorecerá a un flemático, que fungirá mejor en el círculo exterior. El melancólico también se desempeñará bien en esa misma posición, ya que

al girar por afuera podrá observar el juego completo. El colérico puede estar junto al sanguíneo.

Se puede preguntar antes de llegar a 60, si llegarán todos los corredores al punto de partida al mismo tiempo. El sanguíneo, si nos descuidamos, ni siquiera contestará porque ya se habrá adelantado. Es probable que el colérico también se adelante dando dos pasos en lugar de un o empujando a los compañeros de las órbitas vecinas.

El flemático seguirá y seguirá orbitando, contando y contando, pidiendo calma y orden sin que nadie lo escuche. El melancólico puede que finalmente decida que lo único que puede hacer es retroceder hasta el cero.

Durante este juego los niños experimentan muchas cosas que les servirán más adelante: el conocer los números primos, los denominadores comunes, el denominador común menor. estas experiencias son semillas de futuras experiencias "Aaajá".

La forma circular del juego es muy útil cuando más adelante aprendan astronomía y capten la conjunción entre la órbita lenta y larga de Saturno alrededor del sol, y la órbita sanguínea de Mercurio.

También podemos observar cómo los alumnos se forman en línea recta al comenzar el juego, y como al transcurrir, esta líne se va doblando hasta convertirse en espiral. Este fenómeno se observa claramente si los niños sujetan una bola de estambre o cordel y van soltándola según van marchando. Si usamos las tablas mayores como la del 5, el 6, el 7 y el 8, en lugar de la del 2, 3, 4 o 5, el efecto es aún más notorio.

Al vivir estas experiencias en las clases de matemáticas podemos desarrollar temas que satisfacen una profunda necesidad en todo alumno, principalmente que las diferentes clases y materias en la escuela están relacionadas e interconectadas entre ellas, y que todas muestran diferentes aspectos de un todo.

Capítulo 7

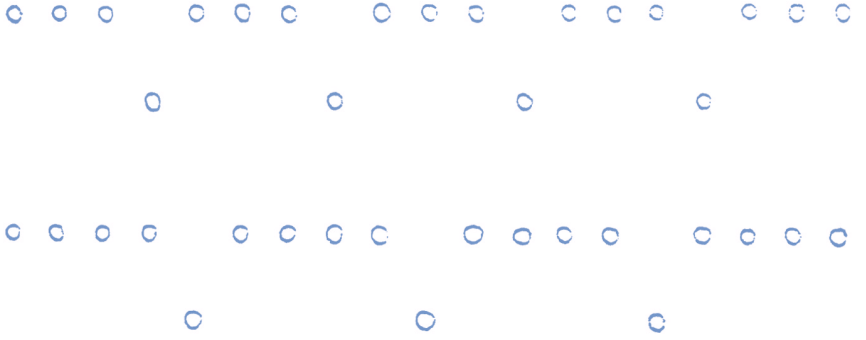
EL DIBUJO Y LA ARITMÉTICA

En este capítulo veremos los ejercicios de dibujo que pueden apoyar la comprensión de las tablas de multiplicar.

Pedimos a los niños que se formen en línea y que cuenten cada uno empezando con el 1, aquellos cuyo número es parte de la tabla del 3 dan un paso al frente. El grupo ahora observa el patrón que se ha creado.



El mismo ejercicio se repite con la tabla del 4 y del 5



Al hacer las tablas, la distancia entre los alumnos que dan un paso al frente se hace más y más grande, la tabla grupal del 4 tiene 4 niños, quedando 3 y en la tabla grupal del 3 sólo 2 quedan alumnos.

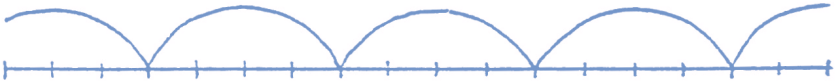
Para el siguiente ejercicio todo el grupo menos el corredor numérico se pone en fila. El corredor corre del primer número de la tabla elegida, al siguiente, y así sucesivamente:



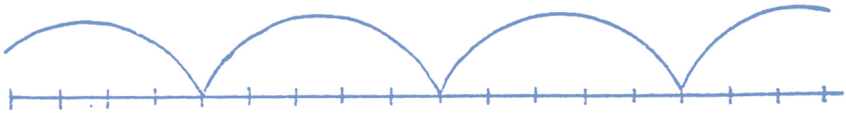
Se salta un niño sí y uno no.



Ahora se salta dos niños cada vez.



Ahora tres.



Finalmente se salta cuatro por vez.

Es importante que el grupo experimente esto lo más intensamente posible. Por lo tanto seguimos con otro ejercicio, dibujamos una línea en el suelo y marcamos los números pares claramente, así como la tabla del 5 y del 10.



Un alumno empieza en el 0 y camina de tres en tres por la línea. Conoce la tabla del 3 y utiliza las marcas del 5 - 10 - 15 - 20, etc. como puntos de referencia. Sin embargo queremos que este paso que abarca 3 se meta hasta las células, por eso lo practicamos una y otra vez junto con las otras tablas, aunque los niños no se sepan todas de memoria aún. Le decimos al alumno, por ejemplo, que de cinco pasos de 3 unidades y vea dónde aterriza. él está aprendiendo que:

$$15 = 5 \times 3.$$

Se pueden practicar muchos ejemplos de las diferentes tablas, Más adelante podemos cubrir los ojos a los niños y ver si son capaces de aterrizar en el número correcto. Por ejemplo si el maestro dice “quiero que des cuatro pasos de 5 unidades, pero antes dime, ¿A dónde llegarás? El niño contesta y se le cubren los ojos. Camina por la línea y cuando para el maestro le quita la venda de los ojos para que vea qué tan cerca llegó a su objetivo. Probablemente no lo hizo muy bien, quizá se pasó, así que lo intenta de nuevo. Esta vez para antes del objetivo. Tras varios intentos lo logra. Es como el cuento de Polifemo el ciego, que le tiraba piedras a Odiseo. La primera se pasó y la segunda no llegó, pero a Polifemo sólo se le permitieron dos intentos.

Mientras tanto los otros niños miran con gran interés y aprenden mucho más de lo que se imaginan. Más adelante todos podrán intentarlo, y sus habilidades aritméticas se verán llevadas hacia el límite.



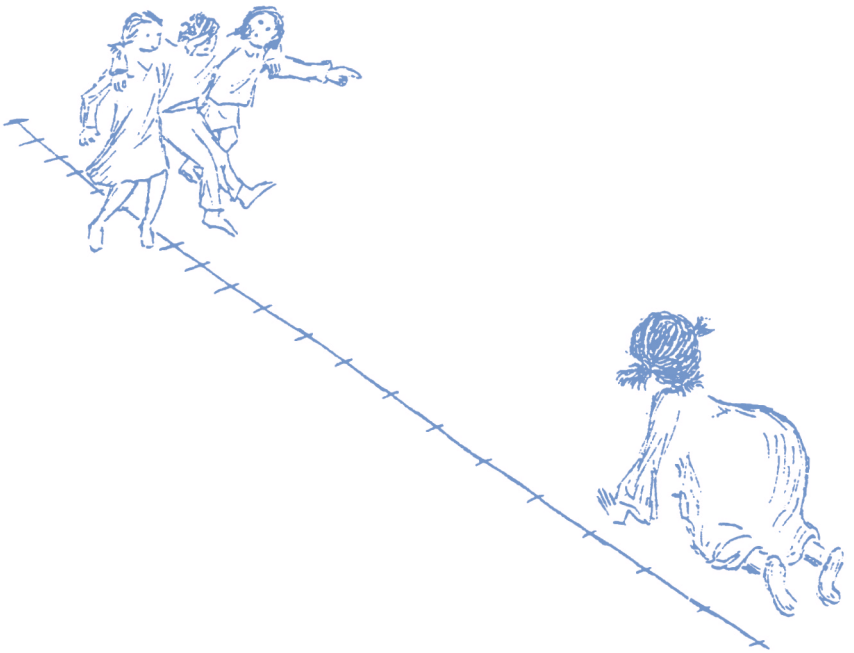
Lo que aún no vive en la cabeza ya está en los piés

También podemos probar con los números más altos mientras le decimos al grupo "estas tablas vienen más adelante, pero ahora podemos experimentar para ver qué pasa". Si tomamos, por ejemplo, la tabla del 11, el grupo pronto descubre que el saltador no puede llegar tan lejos, quizá dos compañeros le pueden ayudar tomándole de los brazos para que salte lejos.

11 - 22 - 33 - 44, etc.

Otra manera de resolver el problema es correr en un largo arco de un número al siguiente: 11 to 22, to 33, to 44, etc.

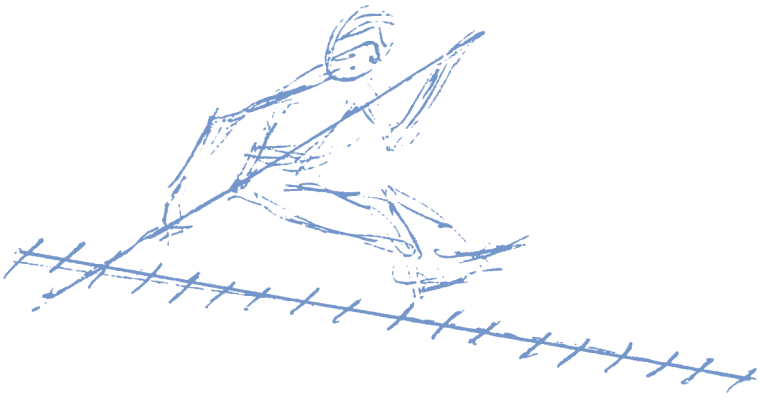
Con las tablas más altas y pares, podemos saltar a medio camino y aterrizar en el número con ambos pies juntos – bueno, por lo menos podemos intentarlo ya que no es tan fácil como suena. Aprenderemos que



Una manera de dar pasos largos para las tablas más altas.

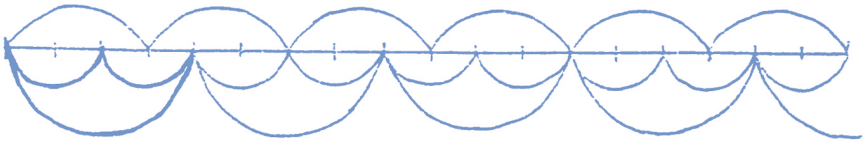
la tabla del 12 está compuesta por cada número alternativo de la tabla del 6. Algunos querrán intentarlo con tablas impares, y esto les dará en qué pensar.

ilustración: Si conseguimos un juego de pértigas podemos dejar que practiquen las tablas así. Tal como el saltador ellos podrán saltar lejos y caer en el número correcto. Otro día se puede usar un canto rodado o piedrita, como cuando jugamos avión o rayuela, y pedirles que lo tiren sobre el número correcto. Esto es más difícil, sin embargo sus poderes de observación se afinarán. Con una piedrita y una línea numérica también se puede practicar sumas y restas.

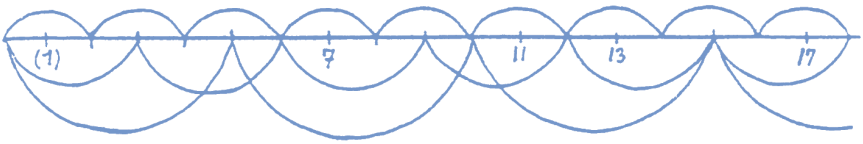


Contar y saltar.

Ahora pueden dibujar estos ejercicios en sus cuadernos usando colores:



Una vez más los niños experimentan – esta vez visual y manualmente – como ciertos números surgen y otros no. Si tomamos, por ejemplo las tablas del 2, del 3 y del 5 juntas hasta llegar al 30 los números a continuación claramente resaltan como los pasados por encima.



Es importante practicar las tablas altas más y más de esta forma. Estos ejercicios están diseñados para que los niños sientan la progresión y la distancia entre las series de números en cada tabla. Las medidas de 3 y

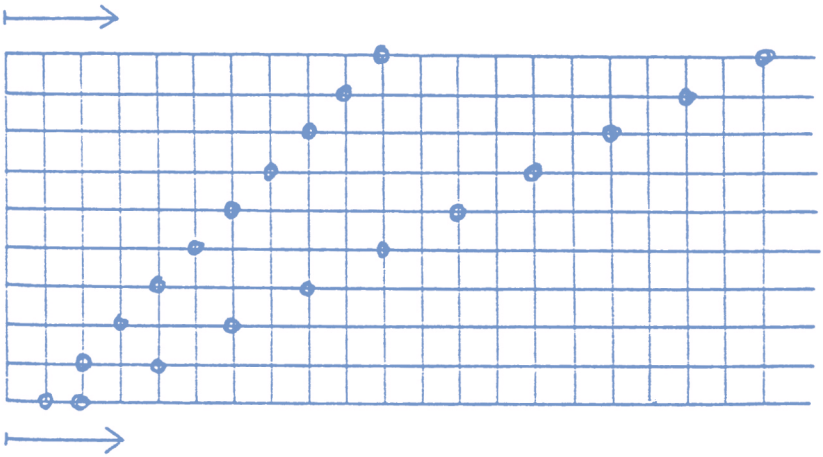
4 son fáciles de calcular, pero cuanto más alta es la tabla, más grandes son las medidas. Descubrimos que nuestras piernas no son lo suficientemente largas, así que usamos 'alas' pero esto también nos cansa pronto y es necesario hallar un mejor método.

A continuación descubrimos que nuestros ojos pueden saltar rápidamente de un número a otro, y finalmente, nos damos cuenta que la manera más rápida de salta de un número a otro es con el pensamiento. Hemos descubierto un método que no tiene límites. Ahora sabemos que podemos saltar de un número a otro tan rápidamente y tan lejos como queramos, pero también aprendemos a saltar con cuidado ya que al moverse tan rápido es fácil cometer errores ¡Especialmente si se trata de números grandes!

Es muy importante que el grupo viva esto – llegar muy lejos, muy rápido. Le pedimos a diez niños que se formen contra la pared, contamos lentamente a 10. El primer alumno sólo da un paso, ya que su tabla es la del uno, el segundo da dos por su tabla que es la del 2, etc. El último alumno es el único que da diez pasos. El resultado es una formación diagonal como se muestra en la parte superior de la página siguiente.

Estos lugares corresponden a los lugares que les tocaron en el ejercicio anterior, tomando pasos parejos – el niño más alejado de la pared es el que dió diez pasos.

El maestro cuenta de nuevo y de nuevo los alumnos dan pasos al frente. Cada niño ha caminado dos veces a lo largo de su tabla creando la segunda diagonal de la ilustración. Volvemos a empezar pero esta vez lo hacemos un poco diferente. Cuando el maestro dice "uno" todos los niños avanzan hacia su primer lugar, es decir la primera línea diagonal, al decir "dos" llegan al segundo punto, y así siguen obedeciendo el mismo principio. El grupo puede ver cómo un lado del salón se mueve muy



Es importante tener este tipo de tabla sobre la pared.
Para los grupos más jóvenes se puede dibujar en el suelo.

rápidamente mientras que el otro lo hace de manera más lenta. El principio de la 'vara de medición' o regla es obvio para algunos niños, pero aún así necesitan practicar, experimentar qué se siente estar a la izquierda, a la derecha o al centro de la línea.

Si el grupo es de segundo o tercer grado, el maestro puede contarles la fábula de la liebre y la tortuga, y dejar que ellos la dramaticen. Para lograrlo, les ponemos a practicar pasos de 'tortuga' o de 'liebre'. Al ser la tortuga dan pasitos cortos, al ser la liebre grandes saltos. Empiezan los dos en el extremo del salón, ambos avanzando con su paso, aunque avanzan al mismo tiempo y dan la misma cantidad de pasos o saltos, la liebre llega mucho más lejos. Después de esforzarse así, el grupo comprenderá la diferencia entre la tabla del 2 y la del 10, y entenderán porqué la liebre saltarina se cansó tanto. Ahora pueden dibujar el cuento e ilustrar a la liebre y a la tortuga en su carrera.

Una y otra vez practicamos, con pasos grandes y pasos pequeños. Al tomar los pasos grandes nos pueden asistir a 'volar'. Lo hacemos con los ojos vendados tratando de aterrizar en el lugar exacto, lo repetimos hasta que nos sale bien. Este ejercicio desarrolla en los niños el sentido de las relaciones espaciales. Practicamos de nuevo sin la venda – pronto lograrán orientarse muy bien en relación a la posici´on de los números: 6 está 1 después del 5, 9 antes del 10, 12 2 más allá del 10, etc.

La transición del sentir hacia la orientación, el saber claramente a dónde nos dirigimos, es de vital importancia. Los sentimientos viven profundamente en nuestro ser, más profundamente que lo que llamamos orientación o saber. Aquí nos apoyan las enseñanzas de Rudolf Steiner acerca de los sentidos, dicen que el sentimiento-percepción que nos brinda nuestro movimiento está relacionado con los sentidos inferiores, la orientación-juicio-saber con los sentidos superiores. Una exploración más profunda no tiene cabida en este libro, pero se puede consultar la obra de Steiner directamente.

Este desarrollo del sentimiento-percepción inmediato hacia la orientación-evaluación continúa. Con la ayuda de los niños construimos un aparato, ilustrado a continuación, usado antiguamente para medir los campos. Nosotros lo usamos para medir nuestra línea numérica, donde antes medíamos con los piés. Ya hemos llegado a la tercera etapa. Después de 'sentir-percibir' y de 'evaluar-juzgar' ahora tenemos un aparato técnico que usamos fuera de nosotros y que no está conectado a nuestro cuerpo, sin embargo nos es muy útil para mediciones externas.

La línea numérica que dibujamos en el suelo ahora debe ser exacta. Esto no es un problema ya que hemos llegado a tercer grado y estamos aprendiendo acerca de pesos y medidas.

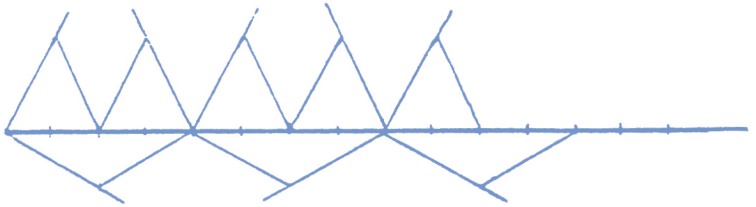


El medidor de tablas de multiplicar en acción.

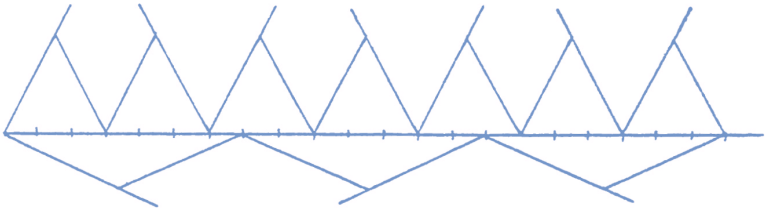
Aquí por primera vez, vivimos las tablas de manera ‘técnica’. NUestro aparato no comete errores, tiene las patas rígidas y no siente nada, tampoco necesita tiempo para orientarse en el espacio.

Es buen momento para hacer unos comparativos, usando un segundo aparato medidor idéntico. El primer aparato lo programamos para el paso a la marca 4, el otro a la marca 2 – ambos de manera muy exacta. El primer niño ‘camina’ con su palo 3 pasos y el segundo niño debe ‘caminar’ 6 pasos para alcanzar a su compañero. Todos sabíamos que esto iba a suceder, y ahora podemos crear muchos ejercicios similares. Por ejemplo ¿Cuántos pasos debe tomar el hermano mayor para alcanzar al hermanito que dio 10? ¿Qué pasaría si el hermanito sólo hubiese dado 5 pasos? A, sí el hermano mayor entonces tendría que parar antes de tiempo o pasar a su hermanito. Así aprendemos que al moverse el hermanito, su hermano mayor se lo encuentra de vez en cuando. El hermanito puede parar donde quiera, el hermano mayor parece más torpe. Dejamos que los

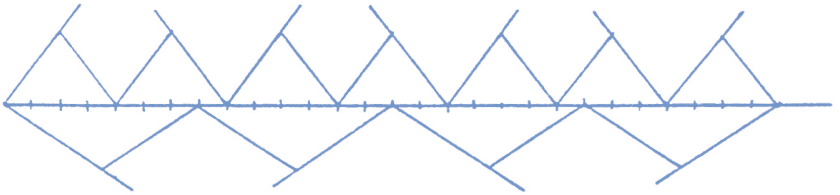
niños dibujen estos ejercicios en sus cuadernos, así mostraran que saben en qué dirección debe estar la manija para cada vuelta del aparato.



Ahora daremos pasos de 7 y pasos de 3, nos preguntamos si las tablas alguna vez coincidirán, descubrimos que se encuentran en el 21 y en el 42.



Hay que ayudar a los niños a ver la simetría de la figura, sin importar la dirección de las manijas. Si queremos mejor simetría aún usemos los pasos 7 y 4 que se encuentran en el número 28.

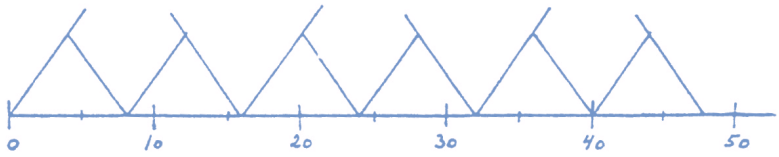


Y si queremos simetría perfecta tendremos que seguir adelante – en ambos casos durante dos periodos completos. ¡Inténtenlo!

Este sencillo aparato le abre la puerta a los niños a un sinfín de ejercicios – de naturaleza claramente práctica – que no podrían

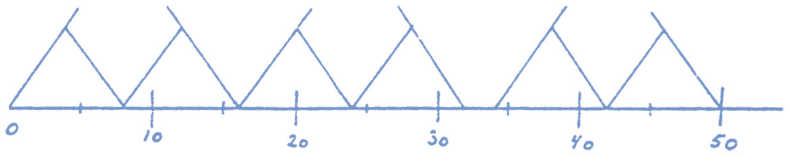
experimentar usando ejemplos 'de la vida real' como camiones o azulejos. Además nuestro aparato de medición es algo que hemos hecho nosotros mismos y que vive en el salón, a diferencia de los camiones y los azulejos.

Ahora coloquemos a un alumno sobre el 0 en la línea numérica, a otro sobre el 50 y ajustemos el aparato a pasos de 8. ¿Es posible alcanzar el 50 usando el aparato? Si no, ¿Qué tan cerca podemos llegar? Después de intentarlo podemos dibujar el resultado en el pizarrón y en nuestros cuadernos.



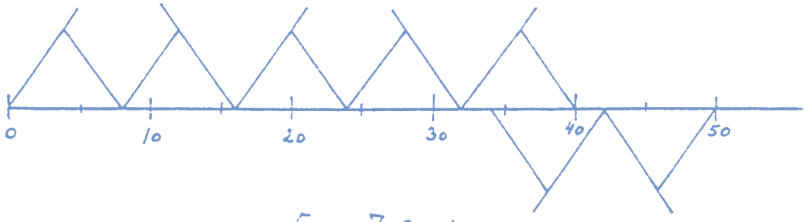
$50 = 6 \cdot 8 + 2$

Es obvio que no aterrizaremos en el 50, sin embargo nos preguntamos si usando dos aparatos, y ajustándolos a pasos de 8, partiendo uno del 0 y el otro del 50 ¿Se encontrarán? No, siempre sobra un espacio de 2.



$50 = 6 \cdot 8 + 2$

También llegamos al punto donde hay una superposición de 6.



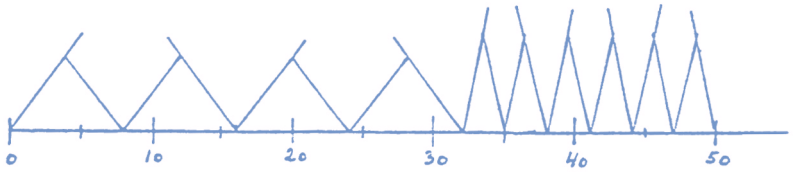
$50 = 7 \cdot 8 - 6$

Si colocamos un aparato en 8 y otro en 3 ¿Se encontrarán en algún punto?¡De pronto el grupo hace un escándalo! Aquí hay que recordar que todo lo que vale la pena comienza desde el caos y que nuestra tarea es del caos dar forma, hacer un cosmos.

Los dos niños experimentan, van hacia adelante y hacia atrás varias veces. Se entregan a la tarea con mucho entusiasmo, lo cual implica que no trabajan con precisión y tienen que volver a empezar varias veces. Finalmente, el maestro tiene que intervenir y ayudarles a trabajar juntos mejor. Algunos niños se dan cuenta lo importante que es saberse la tabla del 8, para saber exactamente dónde aterrizar. Así, empiezan a descubrir que el resolver el problema mentalmente les brinda más confianza a la hora de actuar.

Sin embargo, este aspecto de resolución de problemas también tiene que evolucionar a su propio ritmo.

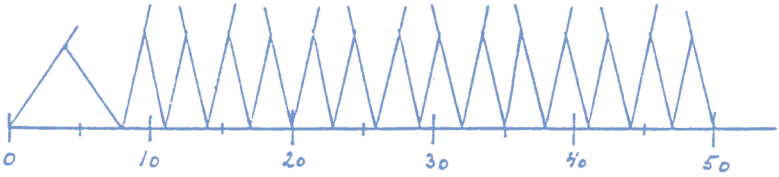
Y seguimos con nuestros palos medidores, descubrimos que al llegar al 48, la tabla del 8 se acerca mucho al 50. Dejamos que el 8 marche hacia atrás con el contador de la tabla del 3 siguiéndolo de cerca desde el 50. Después de que el contador de la tabla del 8 da dos pasos hacia atrás (al 32), los niños gritan "¡Se están juntando!" Así vemos que el 50 es igual a 4 pasos de la tabla del 8 más 6 pasos de la tabla del 3.



$50 = 4 \cdot 8 + 6 \cdot 3$

Este es un concepto complejo para el grupo, pero les encanta trabajar con aparatos.

¿Qué pasaría si dejamos que la tabla del 8 se espere, empiece desde 0 y empuje al contador de la tabla del 3 que viene de regreso? De nuevo es una tarea difícil de hacer y de dibujar.



$50 = 1 \cdot 8 + 14 \cdot 3$

El siguiente juego siempre despierta gran interés. Aparenta ser una lucha entre dos oponentes, sin embargo esta lucha realmente se trata de cómo llegan a aceptarse mutuamente. Se puede jugar con muchas variaciones y con muchos diferentes niveles de dificultad. El juego también contiene elementos matemáticos que surgirán más adelante, pero que algunos alumnos ya estarán contemplando. Por ejemplo, en la siguiente tabla, la primera y cuarta columna nos dan mucho en qué pensar.

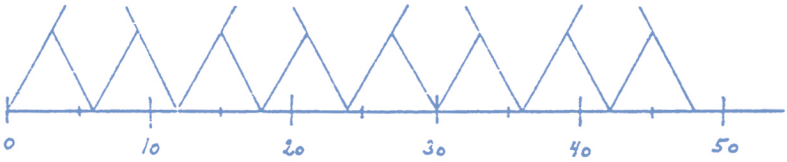
8	16	24	32	40	48
42	34	26	18	10	2
50	50	50	50	50	50

Todos los números de la tabla del 8
¿Hay aquí algún número de la tabla del 3?

Otros aspectos del juego abarcan ecuaciones con dos elementos por descubrir, pero son demasiado avanzados para el tercer y cuarto grado.

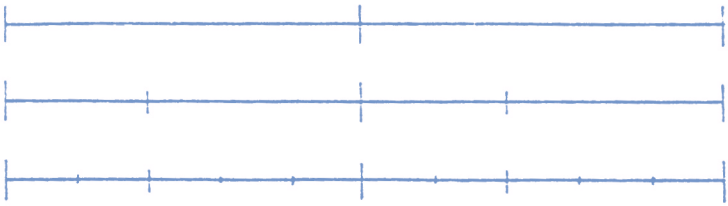
Para prepararnos para el siguiente ejercicio les decimos a los niños que dibujen una línea numérica y marquen la tabla del 5. Después les

pedimos que caminen por la línea pero contando otra tabla, por ejemplo la del 6.



Las tablas del 5 y del 6 se encuentran.

Los niños aprenden muchísimo al dividir una línea en 10 espacios iguales sin usar ningún aparato o regla. Primero deben encontrar el punto medio, después dividir cada mitad usando la razón 2:3, y finalmente añadir las demás marcas.



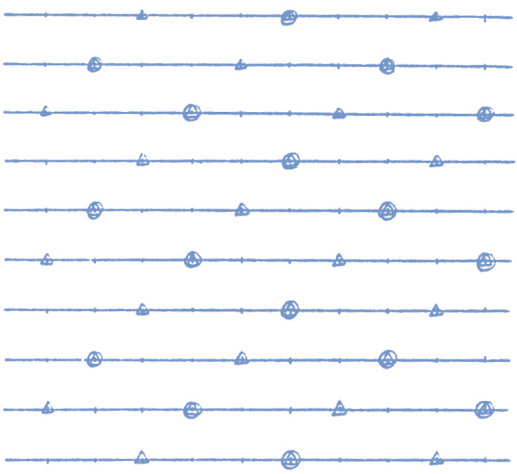
Los dos ejercicios anteriores sirvieron de preparación para el siguiente problema. Primero observamos el movimiento de la tabla del 6 sobre la línea numérica y descubrimos que el primer paso ya nos ha llevado más allá del 5. El siguiente nos lleva 2 más allá del 10 y el tercer paso nos deja 3 más allá del 15. Con el palo medidor podemos sentir inmediatamente que esto tiene que ser así y no de otra manera. Es un hecho bastante obvio, de los que abundan en las matemáticas, y que tendemos a enseñar a los niños a razonar (para entrenar su intelecto) – sin investigar si esa manera es indiscutiblemente la mejor. Es preferible dejar que los niños

sigan los pasos de todos los grandes matemáticos: primero la experimentar e intuir, después razonar.

Es obvio que la tabla del 6 siempre se va a adelantar a la del 5. La tabla del 5 es como la raya entre las baldosas del piso, y la del 6 se asemeja a nuestros propios pasos que son un poco mayores. Así, después de dar cinco pasos hemos abarcado una baldosa extra. Hemos aprendido cierto ritmo en nuestro pequeño paseo y deberíamos poder ilustrarlo de alguna u otra manera. Aquí es donde interviene el ejercicio de dividir una línea en 10 partes iguales.

El grupo dibuja 10 líneas largas, una bajo la otra, y las divide en diez partes iguales para obtener marcas del 1 al 100. Ahora hay que encontrar las marcas que pertenecen a la tabla del 6 y dibujar un circulo colorido a su alrededor.

Vemos qué tan relacionadas están estas dos tablas y cómo se ayudan mutuamente a descubrir la tabla del 9.



Cada tabla tiene su propia estructura lineal.

Otras tablas revelan estructuras diferentes, cada una revela algo de su propia naturaleza.

Es una buena idea dejar que los niños hagan sus propias gráficas, sin embargo cuidemos que no dibujen demasiadas tablas juntas, ya que desaparecerá el patrón individual de cada tabla. Si llegaramos a dibujar muchas tablas juntas, por ejemplo del 2 al 10, también aprenderemos algo – los números que no están rodeados por un círculo son de hecho los números primos del 10 al 100. Podemos escribirlos y hacer una lista de números primos – una tabla más (*tabla* en Latín significa *pizarrón*, para escribir cosas). Esta tabla no es regular y ordenada – ¡Algo más difícil y muy diferente de lo que hemos estado explorando!

Hasta ahora hemos estado trabajando con los números desde dos puntos de vista. Primero, intentamos describirlos como números que los niños pudieran experimentar intuitivamente. A estos números les llamamos 'números esencia' aunque buscamos un mejor nombre, y poco a poco apreciamos en contenido cualitativo de estos números. Asumimos que este tipo de números viven dentro del niño ya que hay muchos ejemplos de cómo las civilizaciones antiguas los vivieron a través de la intuición, además existe un paralelo entre la historia temprana del ser humano y el desarrollo del alma del niño.

Vimos que estos números estaban ligados a nuestros números cardinales, o cuantitativos, pero que se diferenciaban de ellos porque tenían además una naturaleza cualitativa. Esto puede parecernos paradójico, ya que estamos acostumbrados a vivir únicamente lo cuantitativo si de números se trata. Experimentamos estos números en relación a fenómenos orgánicos, donde el número surge casi por necesidad. Ese número era así porque si no, el organismo dejaría de existir como organismo. Por ejemplo, para el niño pequeño, su madre y su padre representan un orgánico número

2, un par, al que no se llega contando, sino siendo. El pico de un pájaro, con sus mandíbulas superiores e inferiores es otro 2 orgánico, no porque lo contemos así, sino porque es un pico.

Otro ejemplo es la función de las manos. En dado momento, todos hemos intentado cargar muchos objetos pequeños de un lugar a otro. Por ejemplo, queremos llevar tazas, platos, botella, cuchillos, tenedores, etc. al quitar la mesa, o quizá una gran cantidad de leña para la chimenea. Algunos objetos se mueven y ajustamos los dedos para evitar que se nos caigan al suelo. Hagamos una pausa para observar qué está pasando con nuestra mano derecha e izquierda. ¡Qué maravilla cómo funcionan! Tienen una función general que no se ve en ninguna otra parte. Esta función está relacionada al número 5, pero como dijimos anteriormente, no porque contemos hasta 5, sino de manera orgánica. Más adelante podemos contar cinco dedos, pero esta cantidad no existía, sólo existía la función de la mano – la función sola. De esta función surge el órgano, la entereza llena de propósito. Logramos contar porque nuestro organismo posee capacidades rítmicas innatas, y por medio del conteo arribamos a la cantidad, en este caso 5.

Nuestro idioma nos brinda estas dos palabras: número y cantidad, que usamos para diferenciar los dos conceptos. La palabra 'número' está asociada a la unidad de un organismo, debe ser comprendido en relación al poder estructurante que divide una entidad en áreas funcionales, las cuales observamos y manifestamos en nuestra consciencia como experiencia numérica. No existen las 'cantidades' en la naturaleza, únicamente existen como actos creativos en nuestro interior. La naturaleza tampoco posee 'números' más allá de los poderes de subdivisión mencionados ya. Es por eso que es un groso error decir que un número es característico de cierto conjunto así como un color es característico de cierto objeto.

Los números no tienen vida propia alejados del ser humano. Si es necesario usar la misma expresión, podríamos decir que los números son característicos del ser humano. Sin embargo, los organismos son completos en sí mismos, poseen diferentes funciones, y una manera de describir este fenómeno es usando conceptos numéricos. Los números están relacionados a la actividad. Esta actividad se expresa en nuestro exterior como una subdivisión de diferentes funciones, y en nuestro interior como lo que comúnmente entendemos como 'número'. El número que experimentamos no existe aislado, fuera de nosotros, como una característica de un conjunto.

Si nos damos tiempo para observar las entidades que hay en el exterior, podremos experimentar los números cualitativos. Si dejamos, entonces, que nuestros dedos merodeen, ayudados por nuestra habilidad rítmica, acompañando, por decir, los rayos de un erizo de mar, arribaremos a cierto número de manera rítmica. Tenemos aquí un número cardinal, resultado de ciertos movimientos corporales – de dedos, de pies, o quizá de un salto de ojos. Estos números cardinales son por completo, creaciones nuestras, no existen a nuestro alrededor. Ahora sí que podemos concordar con aquellos filósofos que dicen que el mundo sólo existe en nuestra imaginación.

Por lo tanto, es necesario diferenciar los tres fenómenos: los números pre cardinales que experimentamos como cualidades, nuestro conteo rítmico basado en dichos números, y nuestros números cardinales que ya no están ligados a lo cualitativo y son meramente cuantitativos.

Los primeros dos fenómenos ya los vimos en los capítulos anteriores, ahora veamos el tercero.

Capítulo 8

NÚMEROS COMO CANTIDADES

Para los niños, todo aprendizaje debe comenzar con movimiento. Dejemos que apunten a sus dedos mientras cuentan 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 y descubren "¡Tengo diez dedos!" Aquí se combinan una imagen básica, arquetípica de un número con el conteo, así llegamos a una cantidad, una medida de cuánto hay. También pueden contarse los dedos de los pies y descubrir que tienen diez.

Las manos les ayudan a comprender, a asir mentalmente, los pies les ayudan a entender. La comprensión y el entendimiento son los últimos eslabones de un desarrollo que comienza con el movimiento.

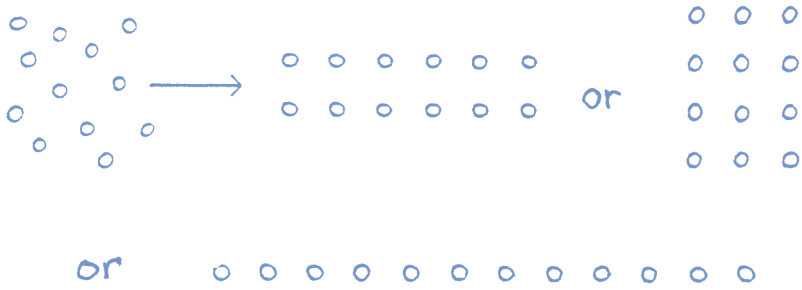
A continuación pidamos a los niños que tomen un puñado de nueces y las coloquen una por una sobre sus pupitres. El movimiento les lleva hacia un número cardinal: 12 nueces, por ejemplo. Debemos asegurar que los niños realicen movimientos amplios, deliberados; esto no es una pérdida de tiempo, es el modo natural del niño.

Hay personas que comentan que el tiempo gastado en estos ejercicios de movimiento podía haber sido utilizado para resolver muchísimas sumas, no entienden que estos ejercicios son los cimientos de esas sumas, que pocas serían las sumas que los niños podrían hacer correctamente si hubieran caído en el método 'cuanto antes, mejor'.

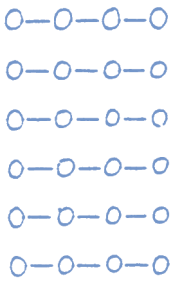
Así pues, los niños han colocado 12 nueces en un montón sobre sus pupitres, ahora les pedimos que las agrupen en un cuadrado, más o menos.



Del caos vamos hacia el orden. Nos preguntamos ¿Hay otras maneras de hacer esto? !Por supuesto que las hay!



A continuación salimos del salón y vamos hacia el auditorio. Los 25 niños se paran de un lado del espacio y le pedimos a un niño que los ordene en el otro lado del espacio. Uno por uno les dirige y pronto vemos algo así:



Cada fila se toma de la mano y dice consecutivamente en voz alta:

"Somos cuatro".

"Somos cuatro", etc.

El maestro pregunta:

"¿24 es…?

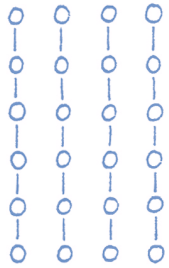
y cada fila dice:

"4" + "4" + "4" + "4" + "4" + "4"

finalmente todos dicen juntos:

"24 es 6 x 4".

El maestro entonces dice "cambio", los niños han observado marchar a los compañeros y ahora el grupo está formado así:



Repiten uno tras otro:

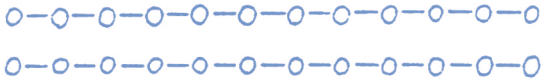
"Somos seis".

"Somos seis", etc.

"24 es '6' + '6' + '6' + '6'."

"24 es 4 x 6".

El vigésimo quinto alumno es responsable de ordenar al grupo.



Ahora el grupo dice:

"Somos doce".

"Somos doce".

"24 es '12' + '12'."

"24 es 2 x 12".

El maestro dice "cambio" de nuevo y el grupo se forma de esta manera:



el texto aquí es:

"Somos dos".

"Somos dos". etc.

"24 es '2' + '2' + '2' ," etc.

"24 es 12 x 2".

De nuevo el maestro dice "cambio" y los alumnos buscan sus nuevas posiciones, algunos dan toda la vuelta, el resultado es esta formación sencilla:



Los niños contestan:

"Somos 24".

"24 es 24".

"24 es 1 x 24".



Esta vez se escucha:

"Soy 1".

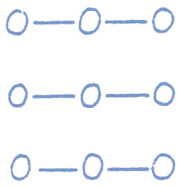
"Soy 1".

"24 es '1' + '1' + '1'," etc.

"24 es 24 x 1".

En esta última ronda hay un cambio de tono. Se puede escuchar a cada individuo. Hay fuertes voces que buscan hacerlo todo solos, hay voces tímidas que buscan sentir más confianza en sí mismos, hay payasos que se divierten mucho al aprender a pararse sobre sus pies, y hay voces dormilonas que están aprendiendo cómo llegar a tiempo.

Al siguiente día regresamos al auditorio y preguntamos cuántos niños se necesitan para hacer una cuadrado de cada lado del espacio. Inmediatamente uno de los alumnos dice “nueve”, y lo intentamos así.



Tomando en cuenta la importancia de la repetición, repetimos la ceremonia del día anterior:

“Somos tres”.

“Somos tres”.

“Somos tres”.

“9 es ‘3’ + ‘3’ + ‘3’. ”

“9 es 3 x 3”.

El grupo se alegra cuando el maestro dice “cambio”. ¡Pero casi es lo mismo! Algunos descubren que no es exactamente igual, ya que ahora están de la mano de otro compañero, pero si vemos la forma, si, es igual. Es bueno haber experimentado este acercamiento hacia cifras puras, a ellas regresarán más adelante.

Si preguntamos si es posible formar un cuadrado menor que sea igual de cada lado del auditorio, la respuesta es 4.



Le preguntamos al grupo "¿Existe un número aún menor que cuando diga "cambio" nada cambie? Pronto a algún alumno se le ocurre que una persona de pie, sola, es la respuesta.

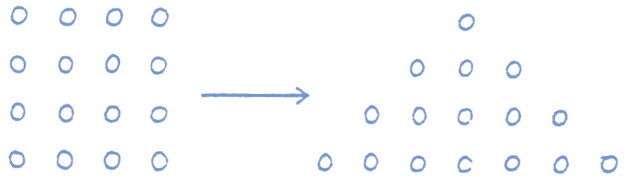
Tomás es el voluntario. Se para en su posición. El maestro dice "cambio" y nada cambia, ¡Todo se queda igual! "Bueno" dice el maestro "Tomás realmente no es un cuadrado, sin embargo 1 si es 1 x 1, imaginemos el día de hoy que Tomás si es 1 de ancho, desde cualquier lugar que se le mire".

Finalmente, intentamos hacer un cuadrado con 16 y uno con 25. Como sólo hay 25 niños en el grupo no podemos explorar más allá.

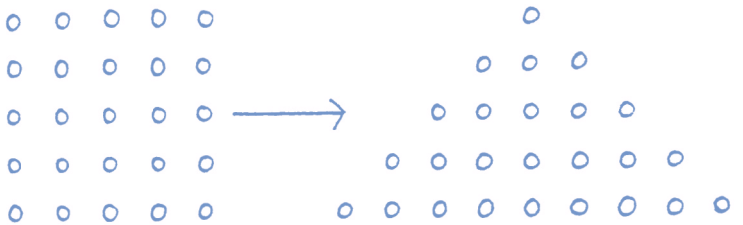
Pero si podemos formar los 9 alumnos de maneras interesantes:



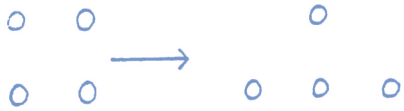
Y después con 16 alumnos –



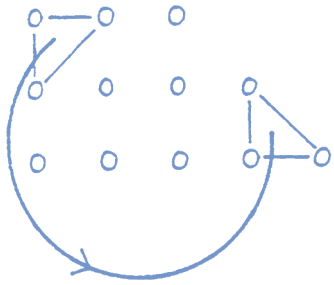
Y después con 25 alumnos –



A si, se nos olvidó probar con 4 alumnos –



Al repetir el ejercicio completo en los cuadernos, se descubre lo que realmente está pasando. Por ejemplo cuando hay 9 alumnos:



Así mismo podemos reorganizar las otras figuras. Algún día que nos sobre tiempo podemos volver a este ejercicio. Observando los triángulos y contando línea por línea de arriba hacia abajo, descubrimos que:

$$1 = 1$$

$$4 = 1 + 3$$

$$9 = 1 + 3 + 5$$

$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

En el cuadrado con 1 alumno, hay que reposicionar 0 alumnos para formar un triángulo.

En el cuadrado con 4 alumnos, hay que reposicionar 1 alumno para formar un triángulo, es decir 1 más.

En el cuadrado con 9 alumnos, hay que reposicionar 3 alumnos,
es decir 2 más.
En el cuadrado con 16 alumnos, hay que reposicionar 6 alumnos,
es decir 3 más.
En el cuadrado con 25 alumnos, hay que reposicionar 10 alumnos,
es decir 4 más.

También aprendemos que si contamos las líneas verticalmente en lugar de horizontalmente llegamos a:

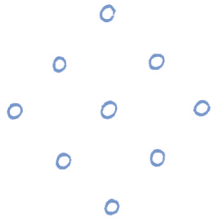
$1 = 1$
$4 = 1 + 2 + 1$
$9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$
$16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$
$25 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

Y esto se puede escribir de la siguiente manera, formando una figura más linda, una pirámide numérica:

1 =	1	
4 =	1 + 2 + 1	3 más
9 =	1 + 2 + 3 + 2 + 1	5 más
16 =	1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1	7 más
25 =	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	9 más

Al finalizar sentimos curiosidad y organizamos las nueces de acuerdo a los números de la pirámide numérica para ver qué formas surgen. Por ejemplo tomamos 9 nueces y los números-pirámide.

1 + 2 + 3 + 2 + 1, aparece



y descubrimos que es la misma figura puesta de lado ¡Debíamos haberlo sospechado!

En las páginas anteriores hemos calculado muchas sumas y multiplicaciones, en la mayoría de los casos hemos tenido 'suerte' y los números han funcionado bien juntos. Ahora tomemos 14 nueces y pongámoslas en una fila larga frente a nosotros, muy juntitas. Después quitamos una nuez si y otra no. Las nueces restantes tienen más espacio entre sí. Coloquemos las que quitamos respetando el espacio que se ha creado. Ahora parece que las 14 nueces son el doble.



Repetimos el ejercicio y vemos que ahora ocupan dos veces más espacio, cuatro veces más que al principio. Siguen siendo 14 nueces pero están posicionadas de tal manera que ocupan mucho más espacio. A la larga, si quisiéramos, podríamos colocarlas ¡Para que rodearan el mundo!

Es bien sabido que los niños de menos de 5 ó 6 años valoran un objeto de acuerdo a su tamaño. Para que puedan avanzar y superar esta etapa de su desarrollo necesitan experimentar la expansión y contracción de varios objetos. Al repetir estos ejercicios, entenderán el hecho que el número no está determinado por el tamaño.

De regreso en el auditorio repetimos el ejercicio con 14 niños, formándolos en una fila. Cada alumno dice su número, los números que pertenecen a la tabla del 2 dan un paso al frente. ¡Fácil y agradable a la vista! La nueva fila entrelaza los brazos para mantener la fila firme y juntos se desplazan hacia el final de la primera fila, manteniendo los espacios entre sí parejos. La fila original ahora es el doble de larga.

Repetimos este procedimiento de nuevo y la fila ahora mida cuatro veces más. Esto es lo más lejos que podemos llegar en verdad sin comunicarnos gritando. De hecho, si estiramos la fila para que le dé la vuelta al mundo ¡Nos tendremos que comunicar por teléfono! Las cosas ahora se empiezan a mover a gran velocidad. Hemos podido echarle un primer vistazo a los números elevados a poderes.

Pero, permanezcamos juntos. La fila regresa a su tamaño original y ahora, el último alumno de la fila corre a pararse frente al primero. El penúltimo se pone enfrente del segundo y así hasta que obtenemos dos filas de igual tamaño. Se podría acortar aún más la fila si hubiera lugar entre los niños para meternos, pero como ya estamos parados hombro con hombro no se puede hacer esto. Si hubiéramos sido puntos en una línea, si lo hubiéramos logrado – este tema surgirá en un futuro.

De cierto modo hemos doblado la fila y esta se ha convertido en 7 + 7, cómo doblar un pedazo de papel. El papel al doblarlo también se hace el doble de grueso y la mitad de largo. Podríamos doblar el papel una vez más, sin embargo no podemos doblar la fila de niños de nuevo ya que estamos lidiando con el número 7. Sería necesario que fuera un número par para poder doblarlo de nuevo.

Intentemos otra variación. El grupo de para en una fila de 14, como antes, el último alumno corre a pararse en frente del primero.

El maestro dice, "¿14 es?"
y el alumno de la nueva fila responde, "1"
la vieja fila dice, "más 13"

Otro alumno corre a la fila del frente, así seguimos hasta que la vieja fila ha desaparecido y la nueva la ha reemplazado, mientras esto sucede la conversación será así:

Maestro: "¿14 es?"
Fila nueva: "2"
Fila vieja: "más 12".

Maestro: "¿14 es?"
Fila nueva: "3"
Fila vieja: "más 11", etc.

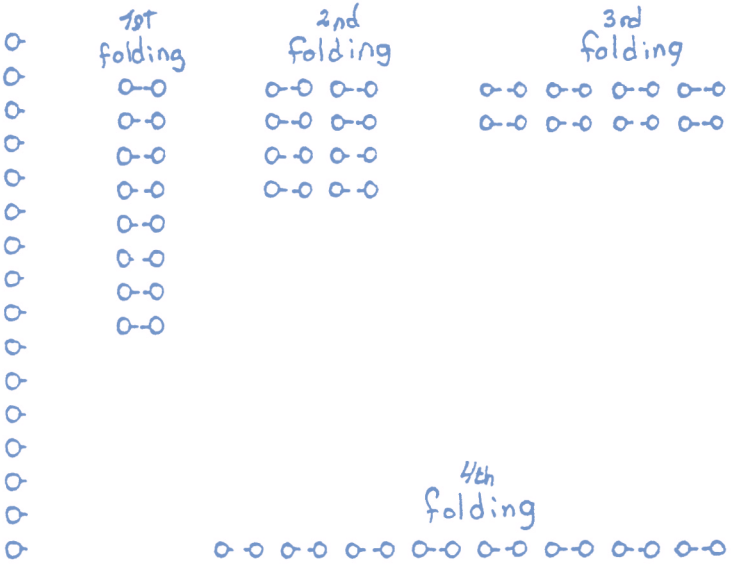
Maestro: "¿14 es?"
Fila nueva: "14 más 0".

Para los niños es simplemente un juego sencillo de sumas, pero es importante por varias razones. Para empezar, el volumen de los sonidos que emiten ambas filas, crea una imagen sonora que refleja lo que está sucediendo con los números. La nueva fila empieza con voz quedita y la vieja fila habla confiada. La situación va cambiando según cambian los números hasta que finalmente la nueva fila puede gritar "14 más 0". Todos tienen la oportunidad de luchar por su fila, y nadie pierde.

Para terminar el trabajo de la lección, tomamos a 16 alumnos y los formamos hombro con hombro. Los podemos doblar las veces que queramos hasta que aparezca una fila posicionada en ángulo recto a la fila

original. Esto significa que si hubiéramos doblado un pedazo de papel las suficientes veces, el teoría se doblaría hasta quedar 'plano' pero ¡En la otra dirección!

Doblarnos nos da un resultado divertido: al terminar ya no estamos parados hombro con hombro sino nariz frente a nariz, en parejas, es decir 'planos' en la otra dirección.

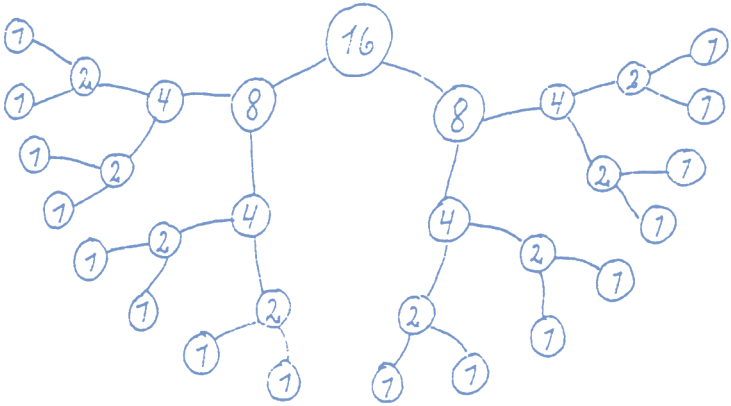


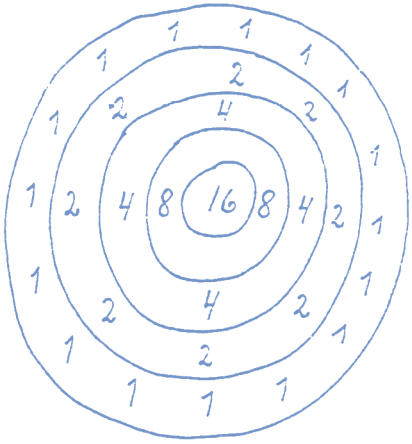
La primera fila vertical muestra a los 16 alumnos mirando en la misma dirección. Después de 'doblar' la fila cuatro veces, los alumnos están frente a frente en parejas

¿Qué hubiera sucedido si la fila original hubiera empezado mirándose las espaldas, o más entretenido todavía, con las manos sobre los hombros del compañero? Experimentamos con estas variaciones, nos estamos preparando para la rotación de figuras geométricas que estudiaremos más adelante en el curso. El momento en que las columnas

de niños logran girar simultáneamente sin perder la forma, es de gran importancia. Esto se ve claramente al observar cómo los niños se concentran en sus posiciones y en la de sus vecinos. En la página 123 hay un ejercicio correspondiente con rotación de figuras. Para estabilizar la formación podemos pedirle a los niños que entrelacen sus brazos.

El siguiente día enseñamos cómo escribir sumas de varias maneras:



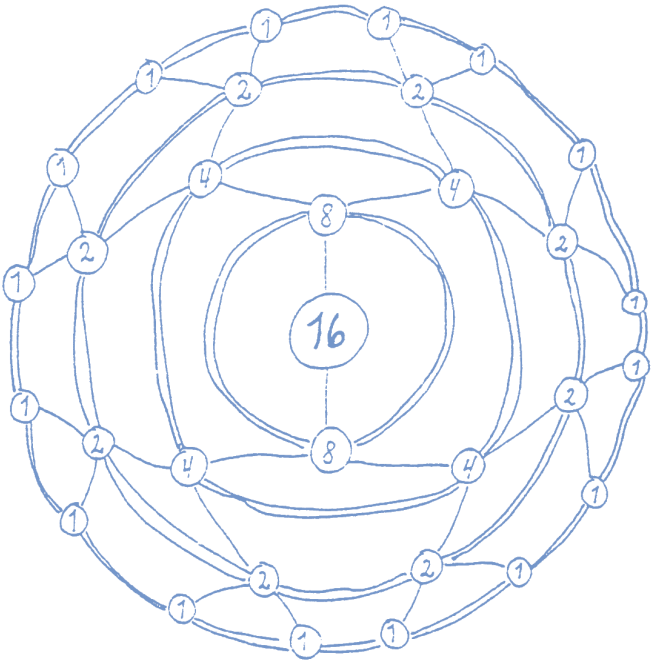


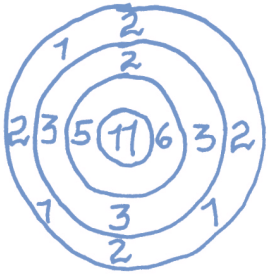
$16 = 2 \cdot 8$

$16 = 4 \cdot 4$

$16 = 8 \cdot 2$

$16 = 16 \cdot 1$





$11 = 5 + 6$

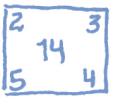
$11 = 3 + 3 + 3 + 2$

$11 = 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

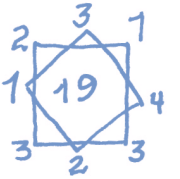
$11 = 3 \cdot 3 + 1$

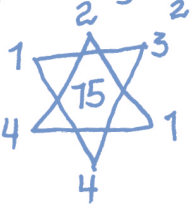
$11 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1$











En la página 119 había una simple suma, importante por varias razones. Veámosla de nuevo:

14
1 + 13
2 + 12
3 + 11
4 + 10
5 + 9
. . .
14 + 0

consideremos la siguiente situación:

Le entregamos a los niños un puñado de nueces – digamos 20. Un niño las pone sobre su pupitre y le pedimos que las reparta en dos montones. Es completamente libre de escoger cómo, y decide poner 7 en un montón. Tras trabajar con el corredor numérico y gracias a muchos otros ejercicios sabe que debe haber 13 en el otro montón. Así pues, escribe:

20 = 7 + 13

Sabe que la suma es correcta ya que puede contar las nueces. Ahora escoge diferentes maneras de repartir 20. Es libre de verificar con las nueces sus respuestas si así lo desea, sin embargo pronto deja de ser necesario. Al poco tiempo ha escrito:

20
7 + 13
11 + 9
6 + 14, etc.

Finalmente, puede ordenar sus respuestas y escribir:

20
1 + 19
2 + 18
3 + 17
4 + 16, etc.

se da cuenta que ya ha escrito todas las posibles combinaciones. El proceso rítmico de escribir la secuencia confirma su propia conclusión.

Este es el método analítico de sumar, a diferencia del método sintético que pide a los niños resolver las sumas de esta manera:

7 + 13 = 20

Hemos mencionado varias veces el tema del alma del niño, tomándolo en consideración, entre otras cosas, en relación a varias frases del 'documento azul' del gobierno danés. Si vamos a poner en práctica "... ante todo y en primer lugar, la actividad y la experiencia…" y aplicarlo hasta al más mínimo detalle del método didáctico, no hay duda que el método analítico de aprender a sumar es el que los niños, si tuvieran opción, escogerían con entusiasmo.

Con el método analítico los niños utilizan su propia iniciativa y dan rienda a los poderes de su imaginación. Encuentran oportunidades para tomar decisiones y experimentar las consecuencias, esto es particularmente benéfico para ellos. A menudo les dejamos tareas donde tienen que decidir, para las cuales no están del todo maduros. Con este método extendemos su habilidad sin sobreextenderla. Se sienten con más y más entusiasmo para descubrir todas las respuestas y para descubrir cuando ya no hay

más respuestas que buscar. A diferencia del método sintético que dirige al niño a una respuesta que ya es conocida por otros que esperan a que él la descubra. El conocimiento es la meta, y en el método analítico la meta es la actividad en sí y la experiencia.

Los niños deben aprender ambos métodos, pero el analítico debe ser el primero ya que satisface sus necesidades primarias. Al mismo tiempo, toca niveles más profundos de la naturaleza del niño.

Decimos "no logra ver el bosque gracias a los árboles" cuando alguien está tan metido en el detalle que pierde la habilidad de ver el panorama completo. A menudo se usa para hablar de un adulto que se ha especializado en cierto tema durante años y se aferra a él. En varios aspectos, es una buena caracterización de nuestra sociedad moderna y sus miembros.

Un niño que no ha sido criado bajo este impulso puede ser aquel que "¡No logra ver los árboles gracias al bosque!" El niño joven acepta todo y absorbe el mundo sin criticarlo, tanto lo bueno como lo malo. El horizonte del niño es increíblemente amplio, pero la vista en esta amplitud no discierne el detalle. Los adultos sin embargo vemos las cosas en gran detalle pero dentro de un panorama muy estrecho.

El niño experimenta el todo – por ejemplo su padre, su madre y sus sentimientos hacia él, hacia el otro, etc. – pero es incapaz de explicar qué está sintiendo y viviendo, tanto a sí mismo como a los demás. Está por lo tanto, a la merced de los caprichos de su entorno.

Asimismo, cuando penetra en un bosque, lo experimenta como un todo. Al entrar en él, sigue siendo un bosque, fresco y tranquilo, con el viento que mece suavemente los árboles. Un adulto se adentra en el bosque de forma muy diferente. Hablando metafóricamente, se puede decir que un adulto toma unos binoculares y se enfoca sobre un grupo

aislado de árboles. Percibe inmediatamente los troncos cortados y quizá empiece a contar los anillos para saber la edad del árbol cortado. Su hijito mientras, se deleita con los anillos en sí, que giran y giran, giran y giran. Recordemos este bosque, dejemos que los niños experimenten primero el todo y después las partes.

Este es el método utilizado anteriormente, cuando hablábamos del primer grupo de números los 'números esencia'. Primero nos permitimos experimentar el todo – por ejemplo la estrella de mar con su estructura irradiante, De aquí experimentamos el numero esencia cinco con todo y su carácter cualitativo. El todo nos dio el número cinco, la esencia del cinco estaba contenida en el todo – así como cuando dibujamos una estrella de cinco puntas dentro del círculo. Es tentador decir que la unidad es el mayor número, que cuanto más 'grande' sea el número ¡Más pequeño es! En el caso de números cualitativos o números esencia, esto es perfectamente cierto.

Los números cualitativos nacen a través de un proceso de división, en el interior del niño por medio de una experiencia de división,no de suma. Por lo tanto es incorrecto darle al niño su primera experiencia del número cinco sumando uno más uno más uno más uno más uno, pensando que le estamos dando al alumno de primer grado una educación en armonía con su expectativa interior. Lo que sigue no es una imagen del número cinco:



Es una figura sintética hecha de pequeños componentes.

Los niños necesitan desdoblar la actividad que surge de su interior, y no que algo externo se les imponga. En este mismo idioma, el número cinco del niño se vería más o menos así:



Estamos tan acostumbrados a enseñar a sumar antes que nada por que es la más fácil de las operaciones aritméticas. Completamente cierto, si partimos del método sintético. Sin embargo si llegamos a la conclusión que el análisis es más importante entonces sólo hay una manera de empezar, dejando que el niño divida de una u otra forma, por ejemplo dibujando una estrella dentro de un círculo.

Nuestra situación es parecida a estar parado en el Polo Norte, donde sólo podemos movernos en una dirección, hacia el sur. Lo mismo ocurre en la aritmética. Antes de tener números con los cuales trabajar debemos dividir, entonces veremos que existen cuatro operaciones, la división es una de ellas.

Es sumamente interesante recordar que, históricamente hablando, el 1 no era considerado un número hasta hace poco. Apenas en el siglo 15, el matemático holandés Simon Stevin (1548–1620), comprobó que el 1 era un número. Antes de eso se consideraba al 1 como manantial del cual surgieron los demás números, así como la Creación surgió del Creador. En la antigüedad, el nombre de Dios era tan sagrado que nadie se atrevía a usarlo, y lo mismo se podría decir del número 1. El mundo de los números, por lo tanto, empezaba con el número 2, ya que era el primero que surgía al dividir el todo. El 2 era menor al 1,menos importante, ya que provenía del 1.

Cuando el 1 dejó de ser el origen, el todo y pasó a ser simplemente un numero, y cuando la distancia entre 2 y 1 ya no era la distancia entre el Creador y la Creación, entonces el 1 pasó a ser una cantidad numérica entre otras muchas. Fue necesario especificar su tamaño en referencia a un punto de inicio, y el 0 se empezó a usar, con la distancia entre el 0 y el 1 como una unidad. El nuevo punto de partida era en sí una imagen, con su forma circular, símbolo del todo.

Desde ese momento en adelante, el 1 dejó de ser el mayor de los números, de hecho se convirtió en el más pequeño (de los números naturales), y entonces se pudo decir: "cuanto más alto el número, mayor es".

Cuando decimos que es esencial que el niño empiece desde el todo, hay que considerar dos aspectos. Primero, esta expresión es relativa a los 'números esencia' y dejamos que el todo, por ejemplo el círculo, se divida para formar la estrella. Así se ve satisfecha nuestra necesidad del aspecto cualitativo de los números. Segundo, y más adelante, podemos considerar el puñado de nueces que le damos al niño como una sola colección, el monto con el que empezamos y que debe ser dividido antes de que podamos hacer cualquier tipo de ejercicio aritmético. Al dividir nacen las divisiones, al repartir nacen las partes, y vemos satisfecha nuestra necesidad analítica. En ambos ejercicios, al pasar del todo a las partes vemos ilustrada la naturaleza cardinal de los números. En ambos ejercicios, hacemos uso de la actividad rítmica del conteo, que trae consigo el aspecto ordinal de los números.

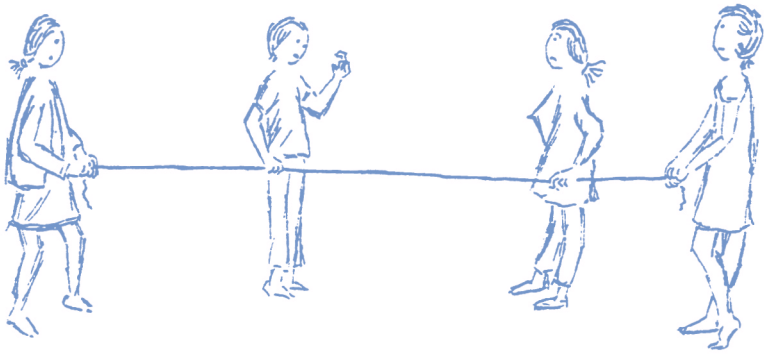
Así, de la actividad analítica surgen tanto los elementos como los cimientos de la aritmética, y del mundo de los números en sí. Por lo tanto, es de vital importancia darse cuenta, especialmente en relación a la enseñanza de los niños, que los números no existen en nuestro entorno, sólo en la mente analítica del ser humano. Por eso la división es el punto de partida de las matemáticas, no división como una de las cuatro operaciones aritméticas, sino división como parte del estudio analítico del todo. El proyectar números sobre nuestro entorno, por ejemplo sobre las ventanas del salón (un error clásico) las convierte totalmente en indigentes, al tiempo que nos perdemos de una de las mayores habilidades del ser humano.

En lugar de esto, démosle al niño un pedazo de arcilla, le podemos pedir que lo divida, por ejemplo, en *tres*. Mientras lo hace, observemos su expresión, ahí está el hogar ancestral de nuestros números. De igual manera, dejemos que dos niños sujeten una cuerda, estirándola. Pidamos a un tercer niño que la sujete justo del medio. Al ver la mirada tasadora del niño, y la duda en su mano, estaremos experimentando el nacimiento del número.



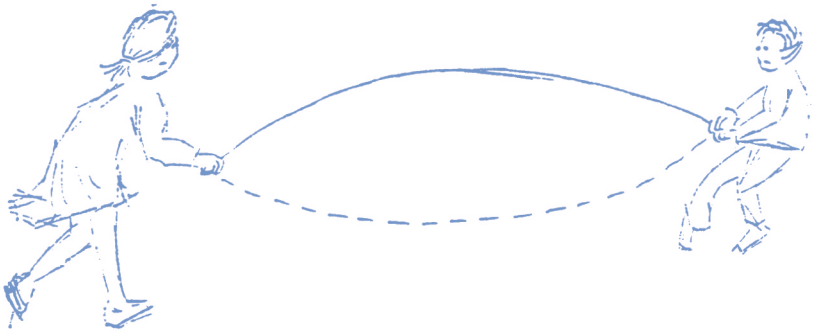
Dividir una cuerda a la mitad requiere un ojo certero.

Si le pedimos a dos niños que trabajen juntos para dividir la cuerda en tres partes iguales, se vuelve a percibir lo mismo.



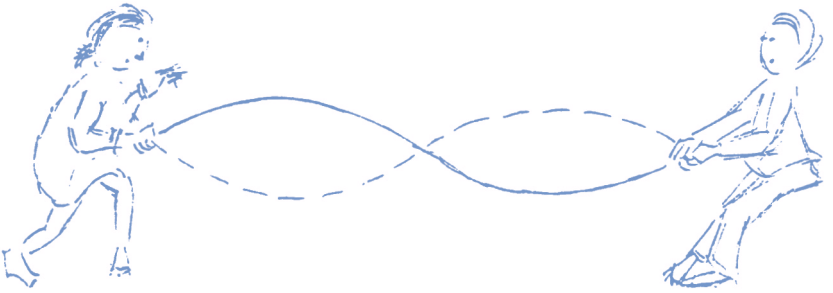
¡Los tríos siempre han causado problemas!

Finalmente, le pedimos a uno de los niños que sujeta la cuerda que la gire mientras su compañero la sujeta sin moverla, esto les da una imagen del todo.



Un juego a la antigua para la primera lección de aritmética.

Luego le pedimos al niño que la gire así:



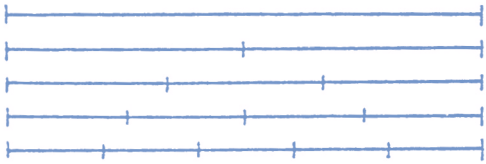
¡Es posible que para lograr esto haga falta un poco de magia!

Si observamos al niño mientras hace este ejercicio, veremos un ser creador de números en la cumbre de la actividad, sobre todo cuando se prepara para girar la cuerda por primera vez.

Más adelante en el salón podemos practicar girar la cuerda en tercios o cuartos. Esto requiere de una gran habilidad, y de hecho, es aritmética por excelencia. También es una buena preparación para otras cosas más adelante, como la enseñanza de la acústica.

Al utilizar ejercicios de este tipo, le brindamos al niño la mejor experiencia posible de los números. No al sumar pieza por pieza, más bien al dividir el todo, de una y de otra manera.

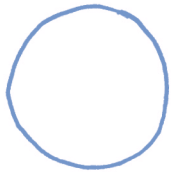
A continuación el método simplificado:



y no:



Como ya mencionamos, otro excelente punto de partida para la enseñanza de la aritmética es darle al niño un pedazo de arcilla y pedirle que lo divida en partes iguales:



Un pedazo se convierte en dos



que se vuelve a dividir



al dividirse la arcilla de nuevo tenemos 8 pedazos.



Ahora podemos hacer mucha aritmética ya que nuestro mundo está lleno de posibilidades. Por ejemplo podemos experimentar que 8 = 5 + 3.



También podemos esconder algunos pedazos de arcilla para que el niño sólo vea 2 de ellos y preguntarle cuántos están escondidos. Así pues, hemos restado. De igual manera, a través de la multiplicación llegamos a nuestro número 8:



y por medio de la división llegamos al 2.



Tomamos nuestra arcilla y le damos una cualidad diferente. De nuestro todo



podemos crear:



y la siguiente vez:



Cada vez de dividimos la arcilla podemos crear una nueva cualidad numérica, un número pre cardinal como punto de partida, el resultado es un número con el cual caracterizamos la cantidad que ha surgido.

Todo número cardinal lleva de vuelta al todo original. Esta sencilla relación es el cimiento de la aritmética para niños de todas las edades. Si le pedimos a un alumno de primer grado que divida la arcilla en 24 pedazos, estamos activando un poder muy superior a las capacidades de cualquier animal. Esta actividad requiere que el ser humano use poderes espirituales. Si le pedimos a un alumno de séptimo grado que reparta la arcilla en 24 pedazos, atestiguamos el mismo fenómeno. El órgano interno numérico se activa y puede resultar en la división del barro en 8 y luego cada pedazo en 3. Hay otras maneras de hacerlo, cada una con su sistema de pensamiento. Hasta se puede dividir la arcilla en 24 desde el principio, pero así se pierde el panorama completo del proceso.

Veamos cómo podríamos dividir la arcilla en 19 piezas. El 19 es un número primo, de nuevo sentimos el carácter especial de este tipo de número. Dividir la arcilla directamente en 19 partes es demandante. No hay atajos, como dividirlo en dos para empezar.

Ahora probemos dividir en ¡50 pedazos! Por ejemplo repartimos a la mitad, luego cada pedazo en cinco y de nuevo, cada pedazo en cinco.

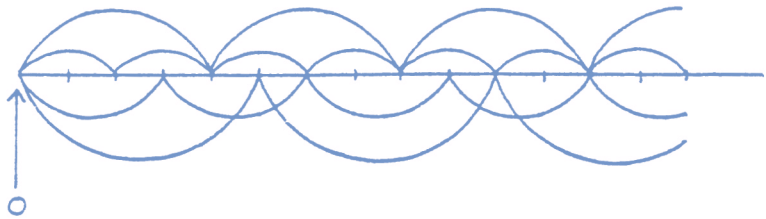
Lo podemos dividir en 28 partes. Por ejemplo a la mitad, a la mitad de nuevo,y cada pieza en 7 partes.

De esta manera se puede ir calculando operaciones cada vez más complejas, aunque en principio estamos haciendo lo mismo que hicimos al pedirle al grupo de primer grado que repartiera su pedazo arcilla en dos. La actividad interna se percibe a diferentes niveles de dificultad, pero en todos los casos partimos del todo y vamos hacia las partes. Por lo tanto, de varia maneras, todos los números cardinales llevan al 1. En el caso de

números primos, sin embargo, no hay atajos y sólo existe una manera de llegar. Cada número primo es único en sus ser, hasta el más grande que podamos imaginar.

Todos los números cardinales conducen al 1, pero nos podemos preguntar ¿A dónde conducen los números rítmicos,parientes cercanos de los números ordinales? Ahora recordemos a aquel alumno, hace varias páginas, que caminaba y contaba hacia atrás, al llegar al 1, tomaba un paso más y decía "cero". Verdaderamente pisó hacia atrás hasta el verdadero punto de partida de los números rítmicos, el origen de todas las tablas. Es por eso que dijimos anteriormente "ahora l - 2 - 3 - 4 - 5", y después: "5 - 4 - 3 - 2 - 1 - cero".

También lo vimos al dibujar esto en nuestros cuadernos:



El 0 y el 1 son, por lo tanto, puntos de origen, y de aquí parten nuestros números ordinales y cardinales. Al ir hacia atrás siempre regresamos al punto de partida, sin importar dónde empezamos.

Todas estas experiencias son parte del día a día del niño del primer grado. No es válido especular con nuestros alumnos acerca de estos temas, simplemente dejemos que las experiencias lleven al descubrimiento, a través del cuerpo y movimiento de los niños.

Más adelante podemos llevar el tema al pensamiento, por ejemplo cuando enseñemos la ley de índices o potenciación, y veamos por qué

$$2^0 = 1$$
$$3^0 = 1$$
$$4^0 = 1$$
etc.

Es decir, por qué todos los números elevados a la potencia de 0 son igual a 1. Todo número está fuertemente relacionado con el 0 y el 1, esto es fácil verlo en la siguiente expresión:

$$a^0 = 1$$

Aquí vemos la relación mutua entre 'a' que simboliza cualquier número, el símbolo '0' y el 1. El '0' hace surgir la unidad que yace escondida en todo número.Siguiendo esta lógica, vamos por el mismo sendero pero en dirección opuesta al que siguieron los alumnos de primer grado cuando fueron del todo a las partes. AL finalizar el año escolar, los alumnos son capaces de entender este problema 0 con el pensamiento. Al principio lo representan con las manos siempre que dividen un pedazo de arcilla de acuerdo a cierto principio, digamos el tres. Al utilizar varios principios, por ejemplo al dividir en 28, aún empezamos con el todo y llegamos al número cardinal. Esta es nuestra perspectiva, en estos ejercicios para los grados inferiores.

Más adelante los alumnos dividirán 28 en factores primos – lo mismo pero con otro *nombre*. El todo entonces, será el 28 y calcularemos sus factores.

En el primer caso, tenemos un pedazo de arcilla que asimos con las manos y dividimos. En el segundo caso tenemos un número cardinal que asimos con la mente e intentamos descifrarlo al dividirlo.

Al trabajar con estas relaciones tocamos otro problema de la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria. La pregunta es ¿Cómo traer el mundo físico al tema de la aritmética de 'hacerlo real'? Y al mismo tiempo ¿Cómo liberarnos de lo concreto, lo mundano para vivir las leyes matemáticas en toda su pureza?

He aquí dos aspectos de las matemáticas totalmente diferentes. Por una parte las matemáticas nos llevan al intangible mundo de la lógica, por otra parte son un instrumento para resolver problemas prácticos en el mundo físico.

Una vez más, debemos empezar desde la situación del niño, no desde el mundo del adulto.

Cuando nos encontramos con una persona muy mayor, su mirada nos da la impresión que están lejos, en otro mundo. Lo mismo pasa con el niño pequeño que vive en un mundo distante, su mirada también lo refleja. ¡Pero qué modo tan diferente de ver el mundo! El primero se aleja después de una larga vida, mientras que el último se acerca a la vida y a convertirse en nuestro igual. Los dos se encuentran al alejarse uno de la vida física y acercarse el otro a ella. Como sucede en los encuentros miran hacia direcciones opuestas, y esta puede ser una de las razones que los niños y los ancianos tienen tanto que decirse. Uno ansía con toda su voluntad tomar el mundo que es, para él, un todo, sin diferenciar. El otro, con toda una vida de experiencia tras él habla con entusiasmo acerca de la gran multiplicidad, interconexión e interrelación compleja del mundo. El primero poco sabe acerca de esto, y sin embargo siente un profundo deseo interior de actuar. El otro siente que ha actuado y está pronto para dejar,

con el conocimiento ahí aprendido, esa fase de la vida. Ambos viven en un plano espiritual, cada uno con su contenido espiritual: grandes imágenes fantásticas en el caso de uno, claros pensamientos en el caso del otro.

Y así, cometemos el error común de intentar convertir al niño en un pequeño adulto al dar la clase 'ideal' de aritmética, al presentarle al niño una batería de objetos, esperando que se desconecte de la cualidad de los objetos en sí y vea únicamente el número de 'cosas', el número cardinal. Ponemos al niño en el mundo de los objetos y acto seguido le pedimos que se abstraiga de él, conservando nada más el número de objetos, número que existe sólo en la vida interior del ser humano, no en su entorno.

Al mismo tiempo, esperamos, sin considerar el interés ardiente que este niño siente por todo lo que encuentra, ciertos saltos emocionales bastante poco razonables durante la lección de aritmética, en la cual se debería de estar practicando algo muy diferente. Le obligamos a ceñirse a las leyes de la lógica, es decir, al mundo donde vive el adulto que ha renunciado al mundo material para vivir en el pensamiento.

Un niño no debe abstraer pensamientos del mundo material, más bien debe vertir su voluntad en el mundo.

Así, tomamos el pedazo de arcilla y la trabajamos con las manos, creando entre ellas una multiplicidad propia. Simultáneamente, es una multiplicidad de objetos idénticos que podemos contar sin distraernos. Con ellos, poco a poco transformamos nuestras imágenes de fantasía en imágenes de pensamiento, y con estas flamantes habilidades de pensar y contar, podemos hacer nuestro camino en el mundo material. Más adelante llegará el día en que podremos dominar el mundo matemáticamente, esto se dará gracias a que hemos consolidado nuestro mundo interior de pensamientos.

Contar objetos es necesario, pero deben ser objetos que el niño mismo ha creado, que no lo distraen – porque está enfrascado en el proceso creativo y sobretodo por que los objetos son idénticos.

Sin interferencia externa las imágenes imaginativas ahora se transforman en imágenes de pensamiento, y al mismo tiempo, la aritmética se liga a algo externo, concreto y tangible.

La aritmética también necesita objetos físicos cuando el niño incursiona por primera vez en el tema, pero deben ayudar, no estorbar el proceso. Esto es análogo a la graciosa situación que muchos padres han observado cuando su hijo aprende a dar sus primeros pasos. El niño se ha podido incorporar y poner de pie con la ayuda de la mesa, o de la mano de mamá, pero aún no se ha atrevido a incursionar más allá. Pero un buen día ahí está, de pie con un cepillo de cabello en la mano – con ese apoyo enorme que la mano percibe igual de sólido que la pata se la mesa – ahora se balancea y atraviesa la habitación hacia la seguridad de la pierna de papá.

El cepillo era el punto fijo, necesario en un mundo físico difícil. Era ligero, no estorbó, y con él en la mano, el niño aprendió a caminar. No lo llevó con el brazo alzado para entregárselo a papá, fue el apoyo necesario durante la primera caminata.

De la misma manera un pedazo de arcilla (o un puñado de nueces o granos, o lo que sea) no es un estorbo, es simplemente una satisfacción para los sentidos necesaria, para que los movimientos del pensar se equilibren mientras se practica el arte de la aritmética.

Más adelante podemos usar diferentes objetos sin causar distracciones, recordemos que no deben ser diferentes por razones netamente abstractas, más bien que surjan naturalmente de la circunstancia.

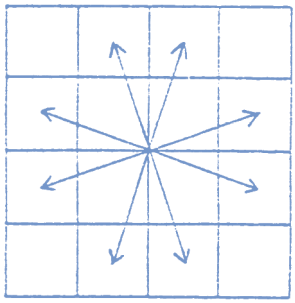
A la larga el cepillo se hace obsoleto, no obstante lo tomamos y caminamos con él, felices al saber que no lo necesitamos. Lo mismo pasa con el pedazo de arcilla. Podemos recurrir a él si hace falta, pero sabemos que somos capaces de usar puros números y sentimos esa libertad. Esto es importante, y podemos hacerlo sin perdernos en lo abstracto.

En los ejemplos anteriores hemos visto diferentes maneras de trabajar con números puros por medio del elemento pictórico en lugar del abstracto. Estos ejercicios se usan durante la transición de ejercicios de conteo a aquellos basados en números cardinales. Los cuadros numéricos pertenecen a esta categoría. Un ejemplo clásico es el grabado de Durero *Melancolía*.

Un cuadrado numérico se arma de la siguiente manera. Primero dividimos el cuadrado en cuadrados menores y escribimos los números del 1 al 16 así:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Ahora intercambiamos números siguiendo este principio:



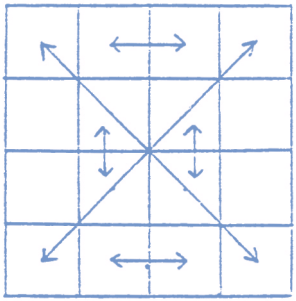
lo que nos da:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Si sumamos las cifras for fila o columna siempre obtenemos 34, también si sumamos en diagonal. Todos los pares simétricos de números que rodean el punto central suman 17, y podemos crear una larga lista de combinaciones que sumen 34 con la ayuda de los números de las esquinas. Por ejemplo:

12 - 8 - 5 - 9
12 - 15 - 5 - 2
1 - 10 - 16 -7

En el grabado de Durero el cuadrado numérico es ligeramente diferente. Se ha creado de acuerdo al siguiente esquema:

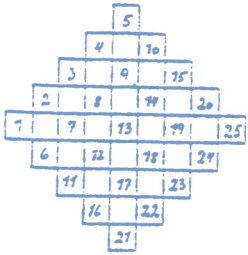


y se ve así:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

El título completo de este grabado es *MELANCOLÍA I*, donde el I significa 'apartarse de'. Este título ofrece una interpretación muy diferente al título corto y corresponde más de cerca al contenido del grabado. Por ejemplo, el sol y el hermoso arcoiris no hablan precisamente de la melancolía.

Volviendo a los cuadrados numéricos, se puede construir otro de esta manera:



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

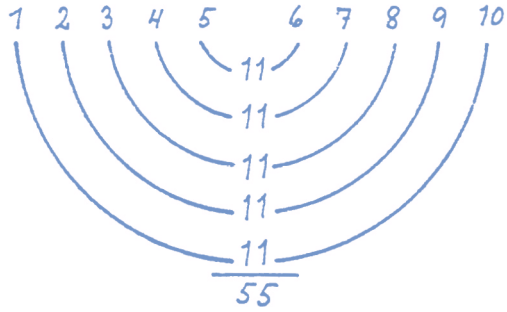
En el dibujo de la izquierda, las cifras con el cuadrado central de 5 x 5 permanecen iguales. Los números periféricos se incluyen en el cuadrado tal como se muestra en el dibujo de la derecha.

En este cuadrado todas las filas y columnas suman 65, así como las diagonales. Las cuatro esquinas suman 52, no 65 por que hemos tomado cuatro cifras y nos falta la quinta. Está en el centro del cuadrado. Ahora los niños pueden encontrar muchos cuadrados de cuatro cifras cuyas esquinas sumen 65 si incluimos el 13 del centro.

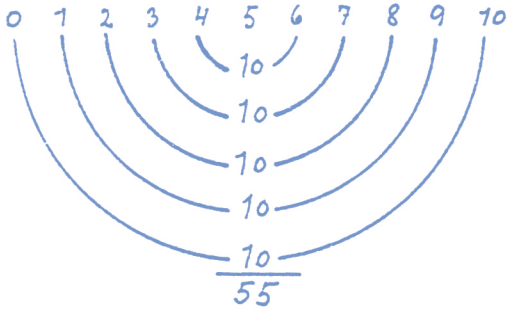
Los niños se deleitan descubriendo estas combinaciones, y también se fortalece su habilidad de trabajar con números.

Otros ejemplos de aritmética con números puros, de la transición del ritmo a la cantidad se dan a continuación. El primero se puede ejercitar muy al principio con una versión sencilla, volveremos a él mucho más adelante cuando estudiemos la fórmula de la suma de una serie y cuando estudiemos diferentes secuencias. Se puede variar infinitamente con filas más cortas o largas y cambiando el total de los elementos de par a impar, etc.

El reto es sumar los números del 1 al 10 así:



También se puede colocar un cero en frente, como se muestra a continuación,el 5 se desplaza pero la suma no cambia:



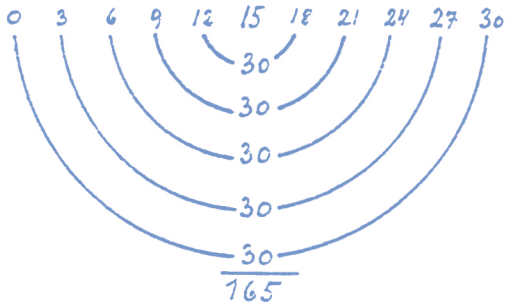
Del 10 restamos 5 y lo ponemos en el lugar del 0 para tener 5 al principio y 5 al final. Después le retamos 4 al 9 y se lo damos al 11 para tener 5 en el lugar del 1 y del 9. Si seguimos así la vieja fila de números

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

se transforma en:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 11 \times 5 = 55$$

Es un buen ejercicio que los niños intenten emparejar la fila y hacer que todos los números sean igual de grandes. Si la cantidad de cifras es impar siempre hay un número medio. Si es par siempre podemos añadir un 0 para convertirla en impar. Con esta formación básica podemos ahora desarrollar muchos ejemplos relacionados a las tablas de multiplicar.



Con una serie irregular de números tal como:

1 4 5 7 10 12 14 19

tenemos que tantear el camino a seguir. Podemos comenzar suponiendo que todos los números pueden transformarse en 10, tomando esto en consideración le restamos 9 a 19 y se lo sumamos al 1 y nos da:

10 4 5 7 10 12 14 10

Ahora podemos restarle 2 al 12 y 4 al 14, se los sumamos al 6 y al 4 y hacemos 10 de nuevo:

10 10 5 7 10 10 10 10

Vemos que no funciona con 10, así que intentamos con 9. El número 5 necesita un 4, el cual formamos con los últimos 10, y nos da:

10 10 9 7 9 9 9 9

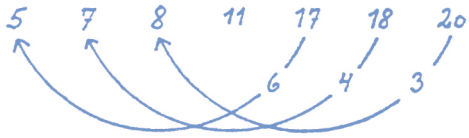
y finalmente:

9 9 9 9 9 9 9 9 9

Estos ejercicios no siempre se resuelven usando un número entero. Hacemos lo que podemos y esperamos a una lección más adelante para aprender un método que nos lleve a respuestas más satisfactorias. Por ejemplo si tenemos los siguientes números:

5 7 8 11 17 18 20

pensamos en el número 11 ya que es el número del medio, hacemos los siguientes cambios:



y llegamos a:

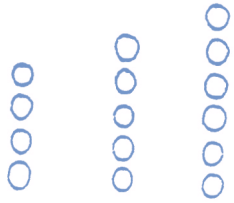
11 11 11 11 11 14 17

Obviamente el 11 no funciona, intentamos 12, restando el 6 del 17 y repartiéndolo entre los 11, esto nos da:

12 12 12 12 12 14 12

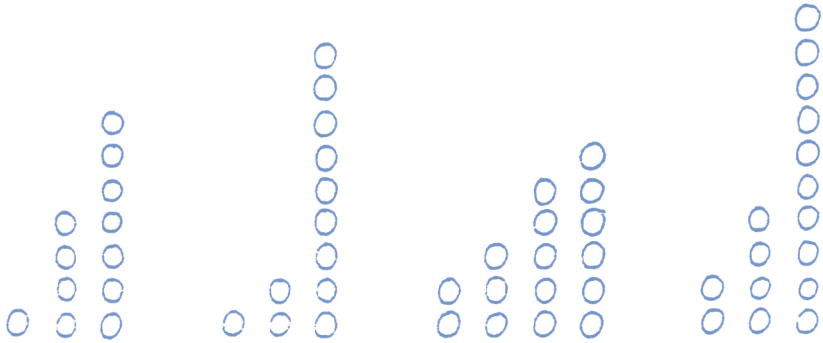
Ahora nos damos cuenta que no podemos mejorar esto, ya que sobra un 2 en uno de los números.

Siempre habrá niños el el grupo a quienes les cueste distribuir los números de esta manera, es probable que haya que utilizar nueces para introducir estos ejercicios. Por ejemplo les podemos pedir que hagan una fila con 4 nueces, otra con 5 y otra con 6. Después les pedimos que redristibuyan las nueces para que todas las filas tengan la misma cantidad. Sólo hay que mover una nuez.



Es importante que los niños se den cuenta que con una sola nuez que muevan las tres filas se emparejan. Sin prisa pero sin pausa hacemos que el ejercicio se torne más y más difícil.

En la última tarea del ejercicio mostrado sobre estas líneas, había un restante. El siguiente ejercicio está relacionado, simultáneamente usamos promedios y practicamos estimar, una habilidad muy importante a desarrollar.



Le damos a 11 niños un número específico de nueces, por ejemplo 10 nueces cada uno. Se sientan a una mesa. 10 de los niños ponen algunas nueces en una mano y las demás en la otra mano, debajo de la mesa. La mano que está sobre la mesa cubre las nueces hasta que el decimoprimer niño da la señal y ellos levantan brevemente la mano mientras él las mira todas. Cubren sus nueces y el niño que dio la señal ¡Debe estimar cuántas hay! ¿Cuántas nueces hay sobre y debajo de la mesa? Le enseñamos a estimar el promedio de nueces que cada niño sostiene, multiplicarlo por 10 y llegar a un estimado total bastante específico. Luego verificamos. Finalmente le preguntamos al niño decimoprimero cuantos montones de nueces recuerda con exactitud,para aquellos que recuerde le preguntamos cuantas nueces, entonces había en la mano correspondiente escondida bajo la mesa. A continuación le toca a otro niño.

La habilidad de estimar una cantidad y verificar la respuesta es de vital importancia a lo largo de la vida escolar del niño. Al enseñarle a hacer esto evitaremos muchas respuestas absurdas.

El siguiente juego es muy útil para lograr este propósito. El maestro tiene algunas nueces escondidas en la mano, digamos 24. Le pide a un niño que las reparta a tres alumnos para que cada uno tenga, si es posible, la misma cantidad de nueces. Sólo se le permite echar un vistazo a las nueces antes de decir cuántas se le deben dar al primer alumno, dice que 6. El maestro se las da y le permite un segundo vistazo. El niño decide que el segundo alumno debe recibir 10 en lugar de 6, y las que sobren para el tercer alumno.

Aquí hay algo que no funciona, el niño cambia 2 nueces del montón de 10 al montón de 6. El maestro recoge todas las nueces en su mano de nuevo y se las enseña a los niños, ellos las contemplan sin prisa y se dicen a sí mismos “así se ven 24 nueces juntas”.



En otra ocasión se pueden poner las nueces sobre la mesa y taparlas con un pañuelo. Los niños echan un rápido vistazo y estiman el total.

Los niños tendrán muchas ideas para mejorar o hacer variaciones en los juegos. Muchas de ellas serán excelentes y algunas no serán tan buenas. Es importante que les dejemos probar todas – hasta las poco útiles o incorrectas – esto les ayudará a desarrollar la habilidad de convertir sus ideas en propuestas que funcionen en la práctica.

Ahora hagamos 10 capirotes, numerados del 1 al 10 con los números escritos de manera que se vean desde cualquier ángulo. Le damos los capirotes a 10 niños que forman un círculo. El maestro dice un número, digamos 7,los niños deben formar parejas cuyos números sumen 7. Las parejas que lo logran se van a parar del otro lado del salón. Las parejas que quedan pueden usar sumas y restas para llegar a 7. Un sustraendo se sienta junto a los sumandos que permanecen de pie. Al quedar completos se mueve todo el grupo al otro lado del salón. ¿Es posible que todos los alumnos se pasen al otro lado del salón?



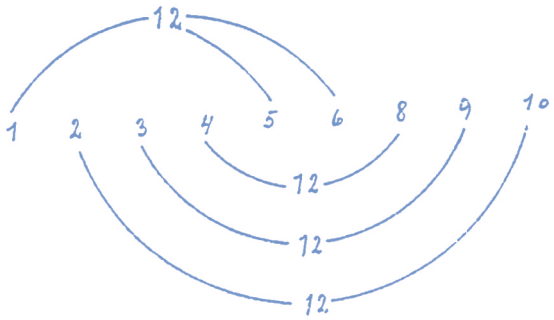
Algunos niños se sienten algo apenados, otros lo opuesto, sin embargo al final, todo sale bien.

Así, el 3 pronto encuentra al 4, el 2 y el 5 se abrazan y finalmente el 1 y el 6 se encuentran. La siguiente ronda tarda un poco más, pero con ayuda encontrarán las siguientes combinaciones 8 + 9 – 10 = 7. El único que queda es el número 7 quién sabía, desde el comienzo, que acabaría quedándose solo. Veamos si podemos llevar al 7 hacia el otro lado del salón. Para lograrlo podemos usar algunos de los que ya están allá, probablemente más de dos compañeros. Una posible solución sería:

$$7 + 5 – 3 – 2 = 7$$

A la larga surge la pregunta ¿Podemos ir al otro lado del salón en un solo grupo que suma 7? Ese problema también tiene solución. La siguiente gráfica ya nos es conocida, razonamos que todos los números se anulan (es decir suman 0) menos el 7.

El problema se puede solucionar fácilmente si tuviéramos un decimoprimer capirote número 0, ya que 7 + 0 = 7.



El número 12 se puede hacer cuatro veces, y estas se anulan.

Ahora los 10 alumnos están parados en un círculo de nuevo,les pedimos que se multipliquen unos a otros para que el resultado sean números entre 10 y 20.

El 10 inmediatamente busca al 1 o al 2, ya que sabe que es la única manera de lograr el cometido, pero el 9 se le adelanta y se lleva al 2, su única esperanza. El 1 pues, toma al 2 y ¡Tan contento! El 2 no sabe a quién elegir pero de repente el 9 le agarra. El 7 y el 8 se sienten indeseados, aunque empezaron con mucha actividad. El 3 es todo lo contrario, permanece tranquilo sabiendo que alguien lo va a necesitar tarde o temprano, sabe que el 6 lo necesita y ayuda al 4 y al 5 a entender que juntos están muy bien.

Este juego también se puede jugar usando restas y divisiones.

Por ejemplo, el maestro escribe los números del 1 al 10 en un círculo en el suelo. Los niños, con los capirotes puestos se paran junto a sus respectivos números. Ahora el maestro escribe un número en el pizarrón, digamos 8 y pide a los niños que se paren junto al número en el suelo con el que suman 8. Algunos deben dejar el círculo al no poder lograr la suma. El grupo entero va verificando los resultados, sabiendo inmediatamente

por qué tres de los lugares del círculo son inservibles y por qué el 4 se para tan orgullosamente sin moverse de su lugar.

Si utilizamos restas la cosa se complica. ¿Restamos el capirote del suelo, o el suelo del capirote? Quizá debamos permitir ambas posibilidades, de cualquier manera la mayoría de los niños tendrán que dejar el círculo, y más aún al utilizar multiplicaciones y divisiones.

Ahora tenemos que hacer una cuadrícula de 10 x 10 en el suelo para los numeros del 1 al 100, lo idoneo seria un suelo de azulejos con losetas de 50 x 50 centímetros. También podemos marcar los cuadros con crucecitas y dibujar algunos de los números, tal como se muestra a continuación. Los niños pronto podrán encontrar por sí mismos los demás números.



El maestro entonces puede decirla a los niños, que esperan con sus capirotes puestos, "¡Párense en sus números!".

Los alumnos ahora ocupan los primeros 10 lugares.

"Sumen 5 al número de su capirote".

Ahora se paran del 6 al 15, la fila se ha interrumpido y el 1 y el 10 están de pie juntos.

“Sumen 15 al número de su capirote”.

El patrón es casi igual.

“Sumen 22 al número de su capirote”.

La fila de nuevo se interrumpe pero de diferente manera.

“Resten 4 al número de su capirote”.

Algunos niños quedan fuera del juego.

“Regresen a su lugar original, cuando yo diga ‘ya’ multipliquen su número por 2 y párense en el nuevo lugar”.

La fila del 1 al 10 ahora se transforma en 2 filas con doble espacio entre ellas.

“Multipliquen su número por 3”.

Vemos Cómo surge un patrón, quizá lo reconozcamos, más adelante lo podemos anotar en nuestros cuadernos.

“Multipliquen por 4”.

“Multipliquen por 5”.

Ahora el patrón es muy especial. Etc.

“Dividan su número por 2”.

Surge una fila corta del 1 al 5 y 5 alumnos deben salir.

“Dividan por 3, por 4, etc”.

Ahora ya no quedan muchos niños en la cuadrícula.

"Dividan 60 por su número" (esto hay que prepararlo con anterioridad)

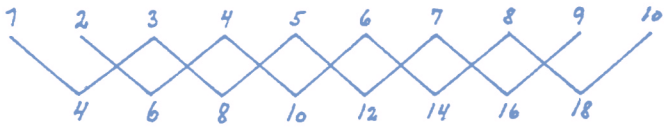
Ahora los niños están repartidos.

Una cuadrícula de 100 cuadros debería de existir permanentemente en la escuela, ya que es de gran ayuda para aprender aritmética. Sin embargo algunos de estos ejercicios también se pueden hacer sobre una línea numérica. Por ejemplo podemos multiplicar por 1, por 3, por 4, etc. y ver los movimientos y patrones que resultan.

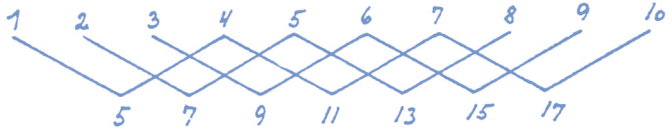
El mismo ejercicio también se puede hacer de otra manera. Pidamos a los niños que traigan linternas de bolsillo a la escuela, de preferencia con haces de luz cónicos y definidos. Se escriben los números del 1 al 100 en el pizarrón en una cuadrícula. Apagamos las luces, oscurecemos el salón y dejamos que 10 alumnos iluminen su número en el pizarrón. Al dar instrucciones, por ejemplo "multiplica tu número por 3" vemos surgir los patrones en el pizarrón.

He aquí un ejercicio más para transicionar de números rítmicos a números cuantitativos, este provee grandes oportunidades para practicar las operaciones.

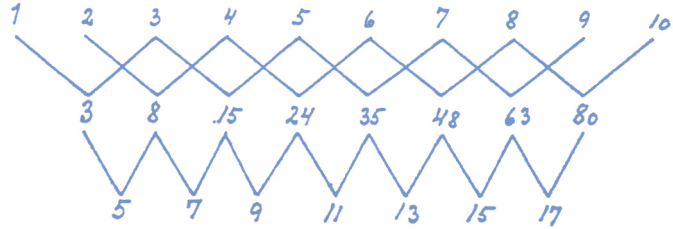
"Sumen los números alternos de la fila".



“Sumen cada tercer número, en parejas”.

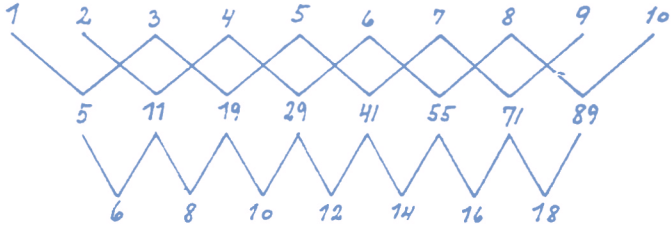


“Multipliquen los números alternos juntos”.

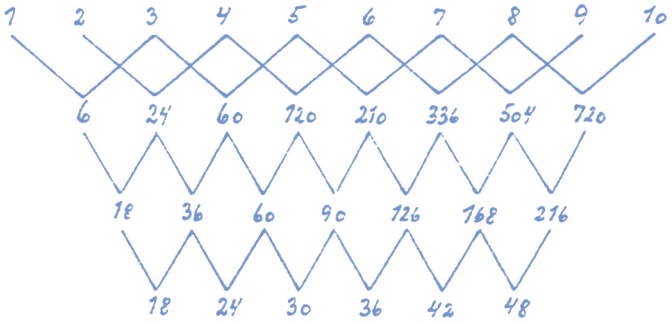


En cuanto los niños detectan el patrón de la secuencia como solución están listos para el siguiente reto.

Al tomar los números naturales en secuencia de tres a la vez, calculamos lo que corresponde a (1 x 3) + 2 para los primeros tres números, 1, 2 y 3.



De la misma manera podemos calcular lo que corresponde a 1 x 2 x 3.



Los alumnos pueden variar estos ejercicios ellos mismos y quizá arribar a las siguientes 'sumas':

(3 x 2) / 1, (4 x 3) / 2, (5 x 4) / 3, etc.
y (1 x 2) + 3, (2 x 3) + 4, (3 x 4) + 5, etc.

Más adelante dejemos que hagan ejercicios más difíciles, quizá como estos:

(1 x 4) + 2 + 3, (2 x 5) + 3 + 4, etc.
(1 x 3) + (2 x 4), (2 x 4) + (3 x 5), etc.
1 x 3 x 4, 2 x 4 x 5, etc.
1 x 2 x 4, 2 x 3 x 5, etc.

Capítulo 9

COMENTARIOS FINALES SOBRE LA MEMORIA, EL JUEGO Y LAS MATEMÁTICAS

En las páginas anteriores he procurado describir tres tipos de experiencia numérica. Como adultos las experimentamos hasta cierto punto, y los números cardinales son los que tiene mayor impacto, ya que los utilizamos continuamente en nuestro día a día. El proceso rítmico, que de hecho es la base de los números ordinales, es menos importante para nosotros. En lo que se refiere a números esencia, los experimentamos sólo en momentos aislados, por ejemplo cuando reflexionamos acerca de nuestro estado emocional, cuando nos cautiva la belleza del mundo vegetal, o cuando nos maravillamos con las formas geométricas del reino mineral.

Para los niños, la situación es al revés. Gran parte de su día transcurre en movimiento rítmico. Esto es evidente al observar a un niño jugar o salir a pasear con sus padres. En cuanto a números esencia, los niños se identifican con ellos por medio de los cuentos de hadas, asimilan las relaciones pictóricas y las cualidades que se manifiestan en las aventuras. Sin embargo, el entendimiento que tiene el niño de los números cardinales se basa en la experiencia poco clara de uno comparado con más de uno o con muchos.

El niño está encaminado hacia nuestro mundo, y debemos acompañarlo en su viaje, apoyarlo con nuestras enseñanzas. La enseñanza está enfocada hacia el alma, de igual modo que la comida está enfocada hacia el cuerpo. La comida que le ofrecemos al niño en este viaje es de naturaleza tangible, nuestras enseñanzas no lo son. El alma infantil está fuertemente conectada al cuerpo, el cuerpo se rige por procesos rítmicos, por lo tanto, nuestras enseñanzas en los primeros años también se deben caracterizar por estos procesos. En cuanto la comida entra al cuerpo, es el ritmo que influye sobre ella. El proceso comienza con la preparación que llevan a cabo los dientes y que sigue a través de todo el canal alimenticio. Del mismo modo, nuestra enseñanza debe ser de carácter rítmica, y en las páginas anteriores hay muchos ejemplos que se pueden usar con grupos de niños jóvenes.

Al transcurrir los primeros años de infancia, la conexión entre alma y cuerpo se va soltando. Al pasar del tercer al cuarto grado, los poderes de la memoria y la comprensión son más accesibles que cuando se empezó la escuela.

La habilidad de aprender de memoria crece, y esto afecta la enseñanza de la aritmética. Antes dijimos que es esencial poder aprender de memoria, y que el método para lograrlo es igual de importante, y de esto tratan las siguientes páginas.

Al estudiar la actividad de la memoria, es obvio que en el pasado el concepto de cómo aparecen las imágenes de los recuerdos en el alma humana es erróneo. Muchas descripciones de estos fenómenos se basan en la creencia que en el momento original en que observamos, vinculamos una imagen a nuestras percepciones sensoriales. Al cesar las percepciones, la imagen se almacena en el alma, así, al momento de recordar se evoca del alma y se coloca en nuestra consciencia nuevamente.

Sin embargo, toda auto observación muestra que las imágenes de los recuerdos no están almacenadas, ya empaquetadas y listas, esperando ser evocadas, sino que son creadas cada vez que las vemos. Las imágenes viejas no existen, como tampoco existe la música vieja, también debe ser recreada cada vez. Puede que pensemos que la música existe en el disco, pero no existe de manera directa, sólo indirecta, ya que existe la ranura que da vida a la música, pero no la música en sí. La música se recrea al tocar el disco cada vez que la escuchamos. En el caso de la música en vivo, hay ciertas notas distintivas que predominan, pero la música en sí es creada cada vez que se toca.

Podemos preguntarnos ¿Cuál es la característica permanente de las imágenes de nuestros recuerdos? Al estudiar nuestros recuerdos a lo largo de nuestra vida, su intensidad y carácter en diferentes etapas, se ve claramente los cimientos sobre los cuales se yerguen. ¿Por qué recordamos nuestras experiencias de la niñez tan claramente? ¿Por qué están preservadas para nosotros con tal fuerza y profundidad, como ningunas otras? ¿Qué significa de hecho, la expresión grabado en la memoria?

En otras palabras ¿Cuál es la esfera de la vida tan susceptible a las impresiones, que somos capaces de recordar? La situación de vida de los niños nos muestra claramente que nuestra habilidad para recordar depende por completo de nuestro movimiento y acción y de nuestra vida emocional, ambos ligados a los procesos rítmicos. Estos proceso rítmicos dominan fuertemente nuestros primeros años de vida. Al pasar el tiempo nos vamos desconectando más y más de ellos, y por lo tanto más libres e independientes de ellos también.

Todas nuestras experiencias afectan nuestra voluntad y nuestros sentimientos. Si lograsemos monitorear nuestro pulso y respiración continuamente, veríamos que son un barómetro extremadamente sensible

que mide nuestro estado mental. Es aquí donde se graban estas experiencias – no como imágenes, sino como marcas en el alma, visibles a nuestra observación interior. La observación interior necesita un suplemento de la imaginación para ser reconocida, así como la observación exterior depende de los sentidos. En el caso de la memoria reconocemos las imágenes que nuestra imaginación nos provee – las hemos visto antes – y las llamamos imágenes del recuerdo. Sin embargo, también son nuevas, existen sólo en el momento en que las evocamos. Lo que es permanente en todo el proceso, es la impresión emocional en el alma.

Por lo tanto, cuando preguntamos qué es lo permanente en la memoria, debemos ir mucho más profundo que la vida de los pensamientos. Así, al enseñar a los niños jóvenes, lo peor que podemos hacer es decirle a los alumnos que vayan a casa y memoricen algo para el día siguiente. En realidad estamos pidiéndoles que vayan a casa y causen las impresiones necesarias en el alma interior, donde vive el ritmo y los sentimientos, para crear imágenes de recuerdos mañana. Es mucho pedir.

En lugar de eso, es mejor practicar los juegos de las tablas de multiplicar antes de que acabe el día escolar. Aquí hay muchos niños juntos, todos haciendo lo mismo. Nos podemos ayudar unos a otros, podemos hacer descubrimientos interesantes juntos. Nos movemos en un espacio grande, sentimos emoción y la posibilidad de múltiples combinaciones. En resumen, contamos con todos los elementos necesarios para crear esas impresiones, y tener algo que observar al siguiente día en el pizarrón interior.

Por lo tanto, las tablas de multiplicar nos dan la mejor oportunidad imaginable de ejercitar la memoria pura. Por un lado, nos importa el trabajo con los puros números, por ende, trabajamos a un nivel que no se ve afectado por el mundo exterior de los objetos. Por el otro lado, tenemos

la oportunidad de sumergirnos en las relaciones rítmicas y descubrirnos precisamente en el área que es capaz de crear los cimientos de las imágenes de recuerdos. Por lo tanto, cuando el ritmo se incorpora y se aprecia correctamente, las tablas de multiplicar se convierten en la primera instancia donde se puede ejercitar la memoria pura con los niños.

Cuando se han construido cimientos sólidos usando ejercicios rítmicos como estos, en cualquier materia, entonces podemos dejar tarea. La tarea que no cuenta con firmes bases de impresiones fuertes en los grados inferiores, sirve de muy poco. Por eso, debemos preguntarnos siempre antes de dejar tarea, si nos hemos asegurado de que existan impresiones duraderas en la vida interior del niño, usando, por ejemplo, cuentos, movimientos rítmicos, nueces que forman patrones sobre el pupitre, repartidas en montones, en forma de cuadrado, de triángulo, etc. Si hemos hecho esto, podemos estar seguros que las impresiones, por sí solas, estarán ahí dentro, esperando y deseando surgir a la consciencia.

Esto puede que pase al día siguiente en la escuela, y nos podemos preparar dejando tarea – tarea dirigida a un punto en el interior del niño, un punto intermedio entre el mundo de sentimientos y el mundo de pensamientos. En otras palabras, una tarea que posee un elemento musical.

La tarea también debe basarse en quién es el niño, no en quién queremos que sea. Es muy fácil dirigir la tarea a impartir conocimientos básicos y muy difícil diseñarla para que nutra la voluntad y la vida emocional del niño. Sin embargo, no existe otro método. El niño de 8 o 9 nueve años en el salón de clases, tiene la misma edad en la tarde cuando hace la tarea. Necesita actividad y experiencia todo el día, también si de aritmética se trata.

Este niño está encaminado hacia nuestro mundo – una metáfora ya mencionada cuando hablamos del encuentro entre niños y ancianos que se

alejan de sus largas vidas. Imaginemos que algunos de estos ancianos fueran matemáticos y que pudiésemos escuchar sus conversaciones con los niños. Qué interesante. Ambos tendrían experiencias importantes en común que compartir, ya que la distancia entre el juego infantil y las matemáticas más avanzadas y difíciles es corta, como ya mencionamos. El juego infantil está elevado del mundo físico, las matemáticas también. Al jugar, el niño utiliza objetos de este mundo, pero es libre de las reglas normales y crea sus propias reglas. Sus objetos obedecen estas nuevas reglas que surgen de la fantasía del niño, de su deseo de acción, se relacionan de manera completamente diferente a como lo hacen cuando el niño se da la vuelta y los deja solos.

En el mundo de los grandes matemáticos – no sólo los ancianos– existe una situación parecida. Su mundo de pensamientos está elevado sobre lo terrenal, y cuando llegan a utilizar objetos terrenales, lo hacen en representación de algo más. Una línea o un círculo trazado en un papel son una simple referencia a la línea ideal, al círculo invisible y perfecto, que únicamente existe en el plano espiritual. En el pizarrón, una tangente dibujada junto a un círculo, lo toca en muchos puntos, pero en el mundo de las ideas, lo toca sólo en un punto. Muchas veces se ha mencionado la importancia de la fantasía y la imaginación en el mundo de las matemáticas, y cómo estas se pueden manifestar ilimitadamente en nuevas formas – nuevas formas que se apoyan no sólo el pensar del adulto, también el el actuar que evoca la intuición infantil.

El juego y las matemáticas van juntos. Aparecen lado a lado como fenómenos relacionados y sin embargo, muy diferentes, como el niño y el mayor de la misma familia que se encuentran – están relacionados pero cada quien mira hacia su propia dirección.

Y al decir el mayor hablamos de las matemáticas superiores, el lenguaje pictórico de las matemáticas, y no aquellas usadas cotidianamente. Es ahí donde se puede comparar el juego de los niños con las matemáticas.

Esto es importante por otra razón. A menudo hemos visto que los grandes descubrimientos creativos en las matemáticas van de la mano de matemáticos muy jóvenes (Abel, Gauss, Pascal y otros). Ellos aún respiran la inspiración de la juventud, aún están en contacto con los sentidos que forman la base del talento matemático. Los grandes descubrimientos matemáticos no se lograron a base de demostraciones pedantemente comprobadas, fueron el resultado de la experiencia intuitiva espontánea de la unidad y unicidad. La demostración, el pensamiento lógico para comprobarle a los demás, no vino hasta después. Estos grandes creadores siguieron el mismo camino del niño pero en sentido contrario, también se basaron en el mismo tipo de experiencia – como la habilidad de recordar las experiencias de la lejana niñez, conectadas al sentido del equilibrio, al sentido del movimiento, etc.

Por lo tanto, al buscar los elementos verdaderamente vitales que podemos utilizar para la enseñanza de las matemáticas con niños jóvenes, estudiemos las leyes del desarrollo del niño y estudiemos también las vidas de los grandes matemáticos.